Nulladrendű logika

2023. október 20.

A gyakorlati anyag alapjául Polos L. – Ruzsa I. A logika elemei című műve szolgált.

Logikai műveletek:
Negáció (tagadás): ellenkezőre vált az igazságérték.
És: ott igaz, ahol mindkettő igaz.
Vagy: ott igaz, ahol legalább az egyik igaz.
Implikáció ($A \to B$): ott hamis, ahol az A igaz és B hamis.
Implikáció tagadása: $\neg(A \to B) \equiv \neg(\neg A \vee B) \equiv A \wedge \neg B$

1. Formalizáljuk az alábbi mondatokat!

   (a) Legolas szőke, mindazonáltal nekem nem tetszik, annak ellenére, hogy a szőkéket kedvelem.

   > **Megoldás.** *Bevezetem: SZ: Legolas szőke, T: tetszik Legolas, K: A szőkéket kedvelem*
   >
   > $$SZ \wedge \neg T \wedge K$$

   (b) Karen hazament, de nem maradt otthon, bár mindenki ezt várta tőle.

   > **Megoldás.** *Bevezetem: H: Karen hazament, O: Otthon maradt Karen, V: Mindenki ezt várta tőle*
   >
   > $$H \wedge \neg O \wedge V$$

   (c) Esik az eső, de nincsen hideg, és a szél sem fúj.

   > **Megoldás.** *E: Esik az eső, H: Hideg van, F: fúj a szél*
   >
   > $$E \wedge \neg H \wedge \neg F$$
   >
   > ***Megjegyzés:*** *Az a)-c) részek tanulsága: a* **de, bár, annak ellenére stb.** *kötőszavak mind logikai* ***és****-t takarnak! Gondoljunk bele: az ”A de nem B” állítás akkor és csak akkor igaz, ha A igaz,* ***és*** *B hamis.*

   (d) Ha hazajössz, és be is vásárolsz, nekem nem kell lemennem és megfőzhetem az ebédet.

   > **Megoldás.** *H: hazajössz, B: bevásárolsz, L: le kell mennem, M: megfőzhetem az ebédet*
   >
   > $$(H \wedge B) \to (\neg L \wedge M)$$

   (e) Ha okos vagyok vagy nagyon szorgalmas, akkor kapok megajánlott jegyet és nem kell vizsgáznom.

   > **Megoldás.** *O: okos vagyok, SZ: nagyon szorgalmas vagyok, K: megajánlott jegyet kapok, V: vizsgáznom kell*
   >
   > $$(O \vee SZ) \to (K \wedge \neg V)$$

   (f) Rizikó nélkül nincs kockázat.

   > **Megoldás.**
   >
   > $$\textit{kockázat} \to \textit{rizikó}$$

   (g) Jeromos vadászik, vagy ha nem esik és meleg van, kertészkedik.

Megoldás. *V: vadászik, E: esik, M: meleg van, K: kertészkedik*

$$V \vee ((\neg E \wedge M) \rightarrow K)$$

2. Igazoljuk, hogy:

   (a) $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B) \equiv (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)$

Megoldás. *Igazságtáblával:*

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	*b.o.*	$(A \wedge \neg B)$	$B \wedge \neg A)$	*j.o.*
h	*h*	*i*	*i*	*h*	*h*	*i*	*h*	*h*	*h*	*h*
h	*i*	*i*	*h*	*i*	*h*	*i*	*i*	*h*	*i*	*i*
i	*h*	*h*	*i*	*i*	*h*	*i*	*i*	*i*	*h*	*i*
i	*i*	*h*	*h*	*i*	*i*	*h*	*h*	*h*	*h*	*h*

A jobb oldal és a bal oldal minden ***interpretációban*** *megegyezik, tehát a formulák ekvivalensek.*
Egy interpretáció a változók egy kiértékelése, az igazságtábla sorai felelnek meg ezeknek.
Modell: olyan interpretáció, amelyben igaz a formula. A $\neg(A \wedge B)$ *formula modellje az első három interpretáció.*
Logikai következmény: a következmény legalább ott igaz, ahol a feltételek együttesen igazak. (A feltétel és a következmények nem feltétlen ekvivalensek.) Így például az $A \wedge B$ *logikai következménye az* $A \vee B$*, hiszen abban az interpretációban, amelyikben az* $A \wedge B$ *igaz, abban az* $A \vee B$ *is igaz. A többi interpretációban igaz és hamis is lehet a következmény.*

Lássuk be ekvivalens átalakításokkal: b.o. $\equiv (A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B) \equiv (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \equiv (A \wedge \neg A) \vee (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A) \vee (B \wedge \neg B) \equiv (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A) \equiv$ *j.o.*

   (b) Igazoljuk, hogy az implikáció nem asszociatív művelet, tehát $(A \rightarrow B) \rightarrow C \not\equiv A \rightarrow (B \rightarrow C)$

Megoldás.

A	B	C	$A \rightarrow B$	*b.o.*	$B \rightarrow C$	*j.o.*
h	*h*	*h*	*i*	*h*	*i*	*i*
h	*h*	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*
h	*i*	*h*	*i*	*h*	*h*	*i*
h	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*
i	*h*	*h*	*h*	*i*	*i*	*i*
i	*h*	*i*	*h*	*i*	*i*	*i*
i	*i*	*h*	*i*	*h*	*h*	*h*
i	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*

A jobb oldal és a bal oldal igazságértéke nem egyezik meg minden interpretációban, tehát nem ekvivalens a két formula, az implikáció művelet nem asszociatív.

   (c) Igazolja, hogy teljesül a disztributív szabály! $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Megoldás.

A	B	C	$B \wedge C$	*b.o.*	$A \vee B$	$A \vee C$	*j.o.*
h	*h*	*h*	*h*	*h*	*h*	*h*	*h*
h	*h*	*i*	*h*	*h*	*h*	*i*	*h*
h	*i*	*h*	*h*	*h*	*i*	*h*	*h*
h	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*
i	*h*	*h*	*h*	*i*	*i*	*i*	*i*
i	*h*	*i*	*h*	*i*	*i*	*i*	*i*
i	*i*	*h*	*h*	*i*	*i*	*i*	*i*
i	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*	*i*

A jobb oldal és a bal oldal igazságértéke minden interpretációban megegyezik, ezért a két formula ekvivalens egymással.