LinAlgDM I. 4-5. gyakorlat: Lineáris egyenletrendszerek megoldása Gauss-Jordan eliminációval

2023. október 19.

Ismételjünk át néhány fogalmat!
Lineáris egyenletrendszer. Az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \dots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{1}$$

ahol $x_1, \dots, x_n$ változók, az a_{ij} és b_i *állandó (konstans)* együtthatók, **lineáris egyenletrendszernek** nevezzük. A fenti egyenletrendszer m db egyenletből áll, és n db változója van. (Az egyenletek és változók számának nem kell megegyeznie.) Az egyenletrendszer lehet **homogén**, ha $b_i = 0$, $i = 1, \dots, n$ (azaz a jobb oldalon csupa 0 áll), illetve lehet **inhomogén**, ha van olyan i, amelyre $b_i \neq 0$ (azaz a jobb oldalon van legalább egy nem nulla együttható).

Az (1) lineáris egyenletrendszerben minden együttható konstans, és minden változónak csak az első hatványa szerepel, továbbá ezek a változók egymással nem szorzódnak, csak a konstansokkal.

Kibővített együtthatómátrix A Gauss-elimináció lépéseinek a leírását megkönnyítettük azzal, hogy nem "cipeltük" magunkkal feleslegesen a változókat, hanem csak az együtthatókat rendeztük el tömbszerűen. Ezért definiáltuk az (1) lineáris egyenletrendszer *kibővített együtthatómátrixát* az alábbi formában:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

A **Gauss elimináció** lépéseit már ismerjük:

1. Lépcsős alak kialakítása kiküszöbölés (elimináció) segítségével ("alsó háromszögből" eltűnnek a változók),

2. Változók értékeinek meghatározása visszahelyettesítéssel, az utolsó egyenlettől az első felé haladva.

Ha a visszahelyettesítést nem szeretjük, inkább többet számolnánk a kibővített együtthatómátrix segítségével, akkor az alábbi algoritmust nekünk találták ki:
Gauss-Jordan elimináció: Adott az (1) lineáris egyenletrendszer.

- *Feladat:* x_i, $i = 1, \dots, n$ meghatározása.

- *Megoldás:*

  1. A lépcsős alakot kialakítjuk kiküszöbölés (elimináció) segítségével ("alsó háromszögből" eltűnnek a változók),
  2. Minden egyenletet elosztunk az ún. főegyütthatójával az alábbiak szerint. A k. egyenletet $k = 1, \dots, n$ az x_k változó együtthatójával, vagyis a_{kk}-val osztjuk le. Ennek eredményeképp a lépcsős alak lépcsőjénél minden együttható 1 lesz.
  3. Az ún. *redukált lépcsős alakot* kialakítjuk úgy, hogy a "felső háromszögből" is kiküszöböljük a változókat egy "fordított Gauss" segítségével: a jobb alsó sarokból indulva felfelé nullázunk, majd mindig eggyel balra és felfelé lépünk és ott folytatjuk.

- A megengedett műveletek ugyanazok, mint a Gauss-eliminációnál; ekvivalens átalakítások, amelyek az egyenletrendszer érvényességét (megoldáshalmazát) nem befolyásolják. Szabad:
  - Egyenletek sorrendjét megváltoztatni (pl. két egyenletet megcserélni),
  - Egyenletet számmal szorozni,
  - Egyik egyenlethez hozzáadni egy másik egyenlet számszorosát,
  - Az azonosan nulla, azaz a $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$ alakú egyenleteket elhagyni.
- A Gauss-Jordan elimináció során is egyszerűbb a kibővített együtthatómátrixot használni. Mivel ennek k. sora a k. egyenletnek felel meg, ezért az algoritmus az alábbiak szerint fogalmazható meg:
  1. Végrehajtjuk a Gauss-elimináció első lépését, kialakítjuk a lépcsős alakot a bal felső sarokból indulva (”alsó háromszög” minden elemét kinullázzuk),
  2. *Vezéregyesek* kialakítása: a kibővített együtthatómátrix főátlójában csupa 1-est hozunk létre az adott sor osztásával,
  3. Kialakítjuk a *redukált lépcsős alakot* úgy, hogy a ”felső háromszöget” is kinullázzuk egy ”fordított Gauss” segítségével, a jobb alsó sarokból indulva, felfelé nullázva.
- Szabad:
  - *Sorok* sorrendjét megváltoztatni (pl. két *sort* megcserélni),
  - *Sort* számmal szorozni,
  - Egyik *sorhoz* hozzáadni egy másik *sor* számszorosát,
  - Az azonosan nulla (kizárólag 0-kat tartalmazó) *sorokat* elhagyni.

1. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss-Jordan elimináció segítségével kétféleképpen: a) egyenletrendszer alakban, b) kibővített együtthatómátrix segítségével!

$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 10 \end{aligned}$$

a) Megoldás egyenletrendszer alakban:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 10 \end{array} \xRightarrow[III.+2\cdot I.]{II.+3\cdot I.} \begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ & & 10x_2 & + & 10x_3 & = & 10 \\ & & 4x_2 & + & 9x_3 & = & 14 \end{array} \xRightarrow{II./10}$$

$$\xRightarrow{II./10} \begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & 4x_2 & + & 9x_3 & = & 14 \end{array} \xRightarrow{III.-4\cdot II.} \begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & & & 5x_3 & = & 10 \end{array} \xRightarrow[III./5]{I./(-1)}$$

$$\xRightarrow[III./5]{I./(-1)} \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & - & 3x_3 & = & -2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & & & x_3 & = & 2 \end{array} \xRightarrow[II.-III.]{I+3\cdot III.} \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & & & = & 4 \\ & & x_2 & & & = & -1 \\ & & & & x_3 & = & 2 \end{array} \xRightarrow{I.+3\cdot II.}$$

$$\xRightarrow{I.+3\cdot II.} \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & & & = & 1 \\ & & x_2 & & & = & -1 \\ & & & & x_3 & = & 2 \end{array}$$

A megoldást közvetlenül megkaptuk, nem kellett visszahelyettesíteni.

b) Megoldás kibővített együtthatómátrix segítségével:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{-1} & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & 10 \end{array}\right) \underset{III.+2\cdot I.}{\overset{II.+3\cdot I.}{\sim}} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{10} & 10 & 10 \\ 0 & 4 & 9 & 14 \end{array}\right) \overset{II./10}{\sim}$$

$$\overset{II./10}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 9 & 14 \end{array}\right) \overset{III.-4\cdot II.}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{-1} & 3 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & 10 \end{array}\right) \underset{III./5}{\overset{I./(-1)}{\sim}}$$

$$\underset{III./5}{\overset{I./(-1)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{array}\right) \underset{II.-III.}{\overset{I+3\cdot III.}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{I.+3\cdot II.}{\sim}$$

$$\overset{I.+3\cdot II.}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

A kibővített együtthatómátrix bal oldalán a főátlóban 1-esek állnak, míg a többi elem 0 (ez az ún. egységmátrix), így az ennek megfelelő egyenletrendszer rendkívül egyszerű szerkezetű:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 0 & + & 0 & = & 1 \\ 0 & + & x_2 & + & 0 & = & -1 \\ 0 & + & 0 & + & x_3 & = & 2 \end{array}$$

Vagyis ebben a formában közvetlenül megkapjuk a megoldást:

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = 2$$

2. Van-e a következő egyenletű síkoknak közös metszéspontja? Ha igen, adjuk meg!

$$x + y + z = 1$$
$$8x + 2y + 2z = -4$$
$$25x + y + z = -23$$

Megoldás.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 2 & -4 \\ 25 & 1 & 1 & -23 \end{array}\right) \overset{\text{eliminálás}\downarrow}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-6} & -6 & -12 \\ 0 & -24 & -24 & -48 \end{array}\right) \overset{\text{eliminálás}\downarrow}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-6} & -6 & -12 \end{array}\right) \overset{\text{vezéregyesek}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{\text{eliminálás}\uparrow}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

A redukált lépcsős alakból felírjuk az egyenletrendszert:

$$x = -1$$
$$y + z = 2$$

Mivel a változók száma $n = 3$, és a redukált lépcsős alak sorainak száma $r = 2$, a szabadsági fok $n - r = 1$ lesz. Így az egyenletrendszer $r = 2$ "kötött" változóval és $sz = 1$ "szabad" változóval rendelkezik. Legyen z a szabad változó: $z = t \in \mathbb{R}$. Ekkor a megoldás:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 - z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 - t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

3. Vizsgáljuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldhatóságát, adjuk meg a megoldások számát! Ha van megoldás, adjuk meg azt is!

$$x_1 + 2x_2 = 3$$
$$4x_1 + 9x_2 = 6$$
$$10x_1 + 21x_2 = 24$$
$$28x_1 + 59x_2 = 66$$

Megoldás.

$$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ 10 & 21 & 24 \\ 28 & 59 & 66 \end{array}\right) \overset{\text{elim.}\downarrow}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -6 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -18 \end{array}\right) \overset{\text{elim.}\downarrow}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -6 \end{array}\right) \overset{\text{elim.}\uparrow}{\sim} \left(\begin{array}{c|c} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 15 \\ -6 \end{matrix} \end{array}\right)$$

A változók száma $n = 2$, a redukált lépcsős alak sorainak száma $r = 2$. A szabadsági fok így $sz = n-r = 0$, azaz nincs "szabad" változónk, és $r = 2$ kötött változónk van. Ennek következtében egy megoldásunk lesz, amely le is olvasható:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -6 \end{pmatrix}$$

4. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert (rögtön az együttható-mátrixos felírást használjuk):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Megoldás.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -6 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{eliminálás}\downarrow}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right) \overset{\text{eliminálás}\downarrow}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & \boxed{1} & -6 \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{vezéregyesek}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -6 \end{array}\right) \overset{\text{eliminálás}\downarrow}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Ezzel a Gauss-Jordan elimináció 1. és 2. lépésének is a végére értünk, ugyanis egyszerűbb volt a számolás úgy, hogy a vezéregyeseket "menet közben" alakítottuk ki. Most pedig végrehajtjuk a 3., lentről felfelé nullázó eliminációs lépést:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{matrix} \end{array}\right).$$

Látható a kibővített együttható-mátrix bal oldalán a az egységmátrix, így az ennek megfelelő egyenletrendszer rendkívül egyszerű szerkezetű:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & = & 1 \\ 0 & + & x_2 & + & 0 & + & 0 & = & 2 \\ 0 & + & 0 & + & x_3 & + & 0 & = & -1 \\ 0 & + & 0 & + & 0 & + & x_4 & = & -2 \end{array}$$

Ebből a formából a megoldás egyszerűen kiolvasható:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = -2 \end{cases}$$

5. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert (rögtön az együttható-mátrixos felírást használjuk):

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & -6 \\ 2 & -2 & 1 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Megoldás. *Az egyszerűbb számítások érdekében megváltoztatjuk az egyenletek sorrendjét (a IV. egyenlet kerüljön az I. helyre):*

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -6 \end{array}\right) \underset{\sim}{\text{eliminálás} \downarrow} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & \boxed{3} & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & -6 \end{array}\right) \underset{\sim}{\text{sorrend csere}} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\text{eliminálás} \downarrow} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \underset{\sim}{\text{eliminálás} \downarrow} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\sim}{\text{elim.} \uparrow} \left(\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & -1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & \boxed{3} & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\text{vezéregyesek}} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \underset{\sim}{\text{eliminálás} \uparrow} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

A kijelölt egységmátrix határozza meg a kötött változókat: $x_1, x_2, x_3 \Rightarrow r = 3$. *A fennmaradó oszlop a szabad változónak (x_4-nek) felel meg. Az egyenletrendszer szabadsági foka tehát* $sz = n - r = 1$, *ami azt jelenti, hogy a megoldáshalmaza egy egyenes, melynek (paraméteres) egyenlete a következő (a paramétert jelölje* $t = z_4$*):*

$$\begin{cases} x_1 = t + 3 \\ x_2 = -t \\ x_3 = -t - 3 \\ z_4 = t \end{cases} \qquad \textit{tehát } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

6. A $c \in \mathbb{R}$ paraméter minden lehetséges értékére vizsgáljuk meg az egyenletrendszer megoldhatóságát és megoldásainak számát! Adjuk meg a megoldást is!

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 &= 7 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 19 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 &= -9 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 &= c \end{aligned}$$

Megoldás. *Felírjuk a kibővített együttható-mátrixot, és végrehajtjuk a Gauss-Jordan eliminációt:*

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} \boxed{1} & -1 & 1 & -3 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 19 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & -9 \\ -2 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 4 & -7 & c \end{array}\right) \underset{\sim}{\text{elim.} \downarrow} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & -1 & 12 \\ 0 & 7 & -4 & 11 & -30 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & 12 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & c-14 \end{array}\right) \underset{\sim}{\text{elim.} \downarrow} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & 10 & 4 & 54 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-26 \end{array}\right)$$

- *Ha* $c \neq 26$, *akkor az alsó sor TILOS SOR, így az egyenletrendszernek nincs megoldása.*
- *Ha* $c = 26$, *az utolsó sor azonosan nulla sor, ami elhagyható:*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & 10 & 4 & 54 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 24 \end{array}\right) \underset{\sim}{\text{sorcsere}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & \boxed{6} & -6 & 24 \\ 0 & 0 & 10 & 4 & 54 \end{array}\right) \underset{\sim}{\text{skalárral szorz.}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 10 & 4 & 54 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\text{elim.}\downarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & -1 & 12 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{14} & 14 \end{array}\right) \underset{\sim}{\text{vezéregyesek}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{\text{elim.}\uparrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{\text{eliminálás}\uparrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{\text{eliminálás}\uparrow} \left(\begin{array}{c|c} \boxed{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}} & \begin{array}{c} 2 \\ -3 \\ 5 \\ 1 \end{array} \end{array}\right)$$

A redukált lépcsős alak sorainak száma $r = 4$. *Mivel* $n = 4$ *változónk van, így a szabadsági fok* $sz = n - r = 0$, *ezért mind a négy változónk kötött változó lesz, a megoldás pedig egyértelmű:*

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$