LinAlgDM I. 3. gyakorlat: Lineáris egyenletrendszerek megoldása Gauss eliminációval (folytatás)

2023. október 13.

1. Adjuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldásainak számát! Adjuk meg a megoldást is!

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 8 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 16 \end{aligned}$$

Megoldás. *Felírjuk a kibővített együtthatómátrixot, majd kialakítjuk a lépcsős alakot:*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & 16 \end{array}\right) \overset{II.-\cdot I.}{\underset{III.-3\cdot I.}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \overset{II.-\cdot I.}{\underset{III.-3\cdot I.}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \overset{II.-\cdot I.}{\underset{III.-3\cdot I.}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

A változók száma $n = 4$. A lépcsős alak sorainak száma $r = 2$, így 2 "kötött" változónk lesz; a szabadsági fok $n - r = 2$, tehát 2 "szabad" változónk lesz a megoldásban. Írjuk fel az egyenletrendszert a lépcsős alakból, majd válasszuk "szabad" változónak az x_3-at és az x_4-et:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 4 \\ x_2 - x_4 &= -2 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x_4 &= t \\ x_3 &= s \\ x_2 &= x_4 - 2 = t - 2 \\ x_1 &= -x_2 - x_3 + x_4 + 4 = -(t-2) - s + t + 4 = -s + 6 \end{aligned} \quad , \quad t, s \in \mathbb{R}$$

2. Adja meg az alábbi egyenletrendszer megoldását és megoldásainak számát a $c \in \mathbb{R}$ paraméter értékétől függően! Minden lehetséges c értéket vegyen figyelembe!

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + cx_2 + 6x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Megoldás. *Felírjuk a kibővített együtthatómátrixot, majd kialakítjuk a lépcsős alakot:*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 0 \\ 4 & c & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{II.-4\cdot I.}{\underset{III.-I.}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & c-8 & -6 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \overset{II.\circlearrowleft III.}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & 0 \\ 0 & c-8 & -6 & 0 \end{array}\right) \overset{II.\cdot(-1)}{\sim}$$

$$\overset{II.\cdot(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & c-8 & -6 & 0 \end{array}\right) \overset{III.-(c-8)\cdot II.}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2c+10 & 0 \end{array}\right)$$

- *Ha $c = 5$, a lépcsős alak utolsó sora azonosan nulla sor lesz, ami elhagyható. Marad tehát két sor a lépcsős alakban, így a "kötött" változók száma $r = 2$, a "szabad" változók száma pedig $n - r = 1$,* *vagyis végtelen sok megoldásunk lesz. A lépcsős alakból visszaírjuk az egyenletrendszert, majd x_3-at választjuk "szabad" változónak:*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x_3 &= t \\ x_2 &= -2x_3 = -2t \\ x_1 &= -2x_2 - 3x_3 = t \end{aligned} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

- *Ha $c \neq 5$, akkor az utolsó sor harmadik eleme nem nulla. A harmadik sor nem azonosan nulla sor, de nem is tilos sor (tilos sornál a jobb oldalon van 0-tól különböző szám), így $r = 3$, a szabadsági fok pedig $n - r = 0$, vagyis mindhárom változónk "kötött", és 1 megoldásunk lesz. Felírjuk a lépcsős alakból az egyenletrendszert:*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \\ (-2c+10)x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x_3 &= 0, \ \textit{mert} \ (-2c+10) \neq 0 \\ x_2 &= -2x_3 = 0 \\ x_1 &= -2x_2 - 3x_3 = 0 \end{aligned}$$

3. Gauss elimináció segítségével adja meg az alábbi egyenletrendszer megoldásait a $p \in \mathbb{R}$ paraméter minden lehetséges értékére! Adja meg a megoldások számát is!

$$\begin{aligned} 9x_1 + x_2 &= -2 \\ -45x_1 + (p-10)x_2 &= 10 \end{aligned}$$

Megoldás. *Felírjuk a kibővített együtthatómátrixot, kialakítjuk a lépcsős alakot:*

$$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{9} & 1 & -2 \\ -45 & p-10 & 10 \end{array}\right) \overset{II.+5\cdot I.}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 9 & 1 & -2 \\ 0 & p-5 & 0 \end{array}\right)$$

- *Ha $p = 5$, a második sor azonosan nulla sor lesz, amit elhagyhatunk. Így $r = 1$ "kötött" változónk, és $sz = n - r = 1$ "szabad" változónk lesz, vagyis ∞ sok megoldást kapunk. Írjuk fel az egyenletrendszert, és válasszuk most x_1-et "szabad" változónak:*

$$9x_1 + x_2 = -2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= t \\ x_2 &= -9x_1 - 2 = -9t - 2 \end{aligned} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

- *Ha $p \neq 5$, akkor az utolsó sor második eleme nem nulla. Ekkor $r = 2$, a szabadsági fok pedig $sz = n - r = 0$, Így mindkét változónk "kötött", és 1 megoldásunk lesz:*

$$\begin{aligned} 9x_1 + x_2 &= -2 \\ (p-5)x_2 &= 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x_2 &= 0, \ \textit{mert} \ p - 5 \neq 0 \\ x_1 &= -\frac{1}{9}x_2 - \frac{2}{9} = -\frac{2}{9} \end{aligned}$$