LinAlgDM I. 1-2. gyakorlat: Lineáris egyenletrendszerek megoldása Gauss eliminációval

2023. október 12.

Ismétlés: Egyenletrendszer megoldása az egyenlő együtthatók módszerével.

1. Tekintsük az alábbi *lineáris*, kétváltozós egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} I.\;\; & x_1 + 2x_2 = 5 \\ II.\;\; & 3x_1 + 7x_2 = 8 \end{aligned}$$

Ha az I. egyenletet megszorozzuk 3-mal, az x_1 együtthatói egyenlőek lesznek a két egyenletben:

$$\begin{aligned} I.\;\; & 3x_1 + 6x_2 = 15 \\ II.\;\; & 3x_1 + 7x_2 = 8 \end{aligned}$$

Ha az első egyenletet kivonjuk a másodikból, az x_1 eltűnik (eliminálódik), és kapunk egy egyenletet csak x_2-re:

$$II - I. \quad (3-3)x_1 + (7-6)x_2 = 8 - 15 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -7$$

Az x_2-t visszahelyettesítjük az I. egyenletbe, és ezzel megkapjuk x_1-et is:

$$I. \;\; x_1 + 2 \cdot (-7) = 5 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 19$$

Fontos megjegyezni, hogy azon a síkon, amelynek egyik koordinátatengelye x_1, a másik pedig x_2, mindkét egyenlet egy-egy egyenest definiál. Az egyenletrendszer megoldása pedig pontosan a két egyenes metszéspontja lesz.

Bővítsük ki ezt a módszert három egyenletre!

2. Tekintsük az alábbi *lineáris*, háromváltozós egyenletrendszert:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} I. & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 15 \\ II. & 3x_1 & + & 7x_2 & + & 2x_3 & = & 44 \\ III. & -2x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 50 \end{array}$$

Először kiküszöböljük (elimináljuk) a II. és III. egyenletből az x_1-et úgy, hogy a második egyenletből kivonjuk az első egyenlet háromszorosát, illetve a harmadik egyenlethez hozzáadjuk az első egyenlet kétszeresét: $II. := II. - 3 \cdot I.$, $III. := III. + 2 \cdot I.$ Ekkor az új egyenletrendszer az alábbi lesz:

$$\begin{array}{lccccccc} I. & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 15 \\ II. & (3-3)x_1 & + & (7-6)x_2 & + & (2-3)x_3 & = & 44-45 \\ III. & (-2+2)x_1 & + & (6+4)x_2 & + & (3+2)x_3 & = & 50+30 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{lrcrcrcr} I. & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 15 \\ II. & & & x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ III. & & & 10x_2 & + & 5x_3 & = & 80 \end{array}$$

Most pedig kiküszöböljük (elimináljuk) az x_2-t a harmadik egyenletből úgy, hogy kivonjuk belőle a második egyenlet 10-szeresét: $III. := III. - 10 \cdot II.$:

$$\begin{array}{lccccccc} I. & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 15 \\ II. & & & x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ III. & & & (10-10)x_2 & + & (5-(-10))x_3 & = & 80-(-10) \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{lrcrcrcr} I. & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 15 \\ II. & & & x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ III. & & & & & 15x_3 & = & 90 \end{array}$$

Ezzel sikeresen kialakítottuk az ún. *lépcsős alakot*. Innen pedig már meg tudjuk határozni a változóink értékét úgy, hogy *visszafelé* haladunk az egyenletek között, és a már ismert változókat lépésről-lépésre visszahelyettesítjük:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} III. & & & & & 15x_3 & = & 90 \\ II. & & & x_2 & - & x_3 & = & -1 \\ I. & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 15 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccc} & \rightarrow & x_3 = 90/15 = 6 \\ x_2 - 6 = -1 & \rightarrow & x_2 = 5 \\ x_1 + 2 \cdot 5 + 6 = 15 & \rightarrow & x_1 = -1 \end{array}$$

Még nem tanultuk, de ha az x_1, x_2 és x_3 változókat térbeli koordinátákként értelmezzük, akkor a fenti példa mindhárom egyenlete egy-egy *síkot* definiál a térben. Ennek a három síknak a közös metszéspontja pedig pontosan az egyenletrendszer megoldása lesz.

Ezt a módszert most általánosítjuk tetszőlegesen sok változóval rendelkező *lineáris* egyenletrendszerekre, ehhez azonban először definiálnunk kell ezt a fogalmat.

Lineáris egyenletrendszer. Az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \dots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{1}$$

ahol $x_1, \dots, x_n$ változók, az a_{ij} és b_i *állandó (konstans)* együtthatók, **lineáris egyenletrendszernek** nevezzük. A fenti egyenletrendszer m db egyenletből áll, és n db változója van. (Az egyenletek és változók számának nem kell megegyeznie.) Az egyenletrendszer lehet **homogén**, ha $b_i = 0\ ,\ i = 1, \dots, n$ (azaz a jobb oldalon csupa 0 áll), illetve lehet **inhomogén**, ha van olyan i, amelyre $b_i \neq 0$ (azaz a jobb oldalon van legalább egy nem nulla együttható).

Vegyük észre, hogy az (1) lineáris egyenletrendszerben minden együttható konstans, és minden változónak csak az első hatványa szerepel, továbbá ezek a változók egymással nem szorzódnak, csak a konstansokkal.

Gauss elimináció: Adott az (1) lineáris egyenletrendszer.

- *Feladat:* $x_i, \quad i = 1, \dots, n$ meghatározása.
- *Megoldás:*
  (a) Lépcsős alak kialakítása kiküszöbölés (elimináció) segítségével ("alsó háromszögből" eltűnnek a változók),
  (b) Változók értékeinek meghatározása visszahelyettesítéssel, az utolsó egyenlettől az első felé haladva.
- A lépcsős alak kialakítása során megengedett műveletek ekvivalens átalakítások, ezek az egyenletrendszer érvényességét (megoldáshalmazát) nem befolyásolják. Szabad:
  - Egyenletek sorrendjét megváltoztatni (pl. két egyenletet megcserélni),
  - Egyenletet nullától különböző számmal szorozni,
  - Egyik egyenlethez hozzáadni egy másik egyenlet számszorosát,
  - Az azonosan nulla, azaz a $\quad 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0 \quad$ alakú egyenleteket elhagyni.

3. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert Gauss eliminációval:

$$\begin{array}{cccccccc} I. & 2x_1 & & & + & x_3 & = & 3 \\ II. & 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & -16 \\ III. & x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}$$

Jelölés egyszerűsítése: az $x_1, \dots, x_n$ változókat felesleges leírni, elég, ha tömbszerűen elrendezzük az (1) egyenletrendszer együtthatóit az ún. **kibővített együtthatómátrix**ban:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Látható, hogy a kibővített együtthatómátrix k. sora a k. egyenletnek felel meg. Következésképpen, ha a lépcsős alakot a kibővített együtthatómátrix segítségével alakítjuk ki, akkor szabad:

- *Sorok* sorrendjét megváltoztatni (pl. két *sort* megcserélni),
- *Sort* nullától különböző számmal szorozni,
- Egyik *sorhoz* hozzáadni egy másik *sor* számszorosát,
- Az azonosan nulla (kizárólag 0-kat tartalmazó) *sorokat* elhagyni.

4. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a kibővített együtthatómátrix alkalmazásával:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 10 \end{array}$$

Felírjuk a kibővített együtthatómátrixot és kialakítjuk a lépcsős alakot:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{-1} & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & 10 \end{array}\right) \underset{III.+2\cdot I.}{\overset{II.+3\cdot I.}{\sim}} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{10} & 10 & 10 \\ 0 & 4 & 9 & 14 \end{array}\right) \overset{II./10}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 9 & 14 \end{array}\right) \overset{III.-4\cdot II.}{\sim}$$

$$\overset{III.-4\cdot II.}{\sim} \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

A kapott eredményt visszaírjuk egyenletrendszer alakba:

$$\begin{array}{lrcrcrcr} I. & -x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ II. & & & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ III. & & & & & 5x_3 & = & 10 \end{array}$$

Innen pedig visszahelyettesítéssel megkapjuk az eredményt: $x_3 = 2$, $x_2 = -1$, $x_1 = 1$.

Nézzünk egy példát **inhomogén** lineáris egyenletrendszer **megoldásainak számára**!

5. Tekintsük az alábbi három egyenletrendszert. Mindegyik példában két egyenes egyenlete szerepel, ezek metszéspontjai adják az egyenletrendszer megoldásait.

a.) $$\begin{array}{r} x_1 + x_2 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 = -2 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 = -6 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} x_1 = 7 \\ x_2 = -6 \end{array}$$

Két egymást metsző egyenes, 1 db megoldás

b.) $$\begin{array}{r} 2x_1 + 1x_2 = 1 \\ -4x_1 - 2x_2 = 3 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} \boxed{2} & 1 & 1 \\ -4 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 = 5 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} 0 = 5 \\ \text{NINCS} \\ \text{MEGOLD.} \end{array}$$

Az együtthatómátrix második sora: $\left(\begin{array}{rr|r} 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$ ún. TILOS SOR: $0x_1 + 0x_2 = 5$

Két egymást nem metsző (párhuzamos) egyenes, nincs megoldás

c.) $$\begin{array}{r} x_1 + 3x_2 = 2 \\ -3x_1 - 9x_2 = -6 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{rr|r} \boxed{1} & 3 & 2 \\ -3 & -9 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 3 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow x_1 + 3x_2 = 2$$

Az együtthatómátrix második sora AZONOSAN NULLA SOR (jelentése: $0 = 0$), ami elhagyható.

2 változó, 1 egyenlet $\Rightarrow$ egy változó értéke szabadon megválasztható:

$$\begin{array}{r} x_1 = -3x_2 + 2 = -3t + 2 \\ x_2 = t \end{array} \quad , \quad t \in \mathbb{R}$$

Két egybeeső egyenes, ∞ sok megoldás

Általánosságban egy **inhomogén** lineáris egyenletrendszer megoldásainak száma 0, 1 vagy ∞ sok lehet.

Vizsgáljuk meg most a **homogén** lineáris egyenletrendszerek **megoldásainak számát**!

Homogén esetben a jobb oldal összes együtthatója 0, így a fenti ábra minden egyenese át kell menjen az origón. Következésképpen a b) eset nem lehetséges, vagyis az előző példát átalakítva (az egyenletek jobb oldalára csupa 0-t írva) vagy egymást metsző, vagy egymással egybeeső egyeneseket kapunk. Az origó mindkét esetben

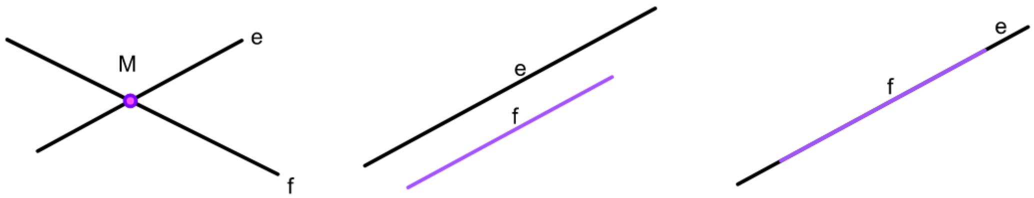

Figure 1: a) Egymást metsző, b) Egymást nem metsző, c) Egybeeső egyenesek

megoldás lesz: az a) esetben ez éppen a metszéspont, vagyis ez az egyetlen megoldás, a c) eset megoldása pedig egy origón átmenő egyenes.

Általánosságban egy **homogén** lineáris egyenletrendszer megoldásainak a száma 1 vagy ∞ sok lehet. Mivel az egyenletrendszer jobb oldalán csak 0-k állnak, egy megoldása mindig van, ez az ún. **triviális megoldás:** $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ (vagyis az origó).

A megoldások létezését és számát az alábbi módon állapíthatjuk meg (mind homogén, mind inhomogén esetben): Tegyük fel, hogy a kibővített együtthatómátrixon már kialakítottuk a lépcsős alakot, és az azonosan nulla sorokat elhagytuk. Ekkor

- a megoldások száma 0 (azaz nincs megoldás), ha TILOS SOR van a mátrixban. Ez csak inhomogén egyenletrendszer esetében lehetséges (mivel homogén esetben a jobb oldalon mindenhol 0 áll). Ilyen a b) eset az előző példában.
- a megoldások száma 1, ha nincs tilos sor, és a lépcsős alak sorainak száma *megegyezik* a változók számával - lásd az a) esetet.
- a megoldások száma ∞, ha nincs tilos sor, és a lépcsős alak sorainak száma *kisebb* a változók számánál - lásd a c) esetet a fenti példában

A megoldásban szereplő szabad paraméterek számát az ún. **szabadsági fok** adja meg. Jelölje r a lépcsős alak (azonosan 0 sorok elhagyása utáni) sorainak a számát, n pedig a változók számát. Ekkor a szabadsági fok $sz = n - r$. A szabadsági fok azt mutatja meg, hogy hány szabadon megválasztható változó van a megoldásban. Ez azt jelenti, hogy a megoldás $n - r$ db "szabad" változóból, és r db "kötött" változóból áll. Míg a "szabad" változók tetszőleges értéket felvehetnek, addig a "kötött" változók a "szabad" változóktól függenek.

Például az a)-ban $n = 2$ és $r = 2$, így a szabadsági fok: $sz = n - r = 0$, így 0 db paraméter van a megoldásban ("szabad" változók száma $n - r = 0$, "kötött" változók száma $r = 2$), míg a c)-ben $n = 2$ és $r = 1$, így a szabadsági fok: $sz = n - r = 1$, ami 1 db szabad paramétert jelent ("szabad" változók száma $n - r = 1$, "kötött" változók száma $r = 1$) .

6. Adjuk meg az alábbi *inhomogén* lineáris egyenletrendszer megoldásainak számát! Számoljuk ki a megoldást is, ha létezik!

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 5x_1 & + & 6x_2 & + & 7x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 4 \end{array}$$

7. Adjuk meg az alábbi *homogén* lineáris egyenletrendszer megoldásainak számát! Számoljuk ki a megoldást is, ha létezik!

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & + & 6x_2 & + & 7x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \end{array}$$

8. Adjuk meg az alábbi egyenletrendszer megoldásait és azok számát is!

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 13 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & -3 \\ 3x_1 & + & 1x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 12 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_4 & = & -4 \end{array}$$