Matematikai Analízis I.

Tételjegyzék 2020.

1. (i) Természetes számok. **Teljes indukció.** Cantor féle közös-pont tétel (B). Halmaz korlátossága. Pontjainak osztályozása.

   (ii) **Infimum és supremum**, kétfajta definíció. Létezés feltétele, tétel (B).

   (iii) **Háromszög egyenlőtlenség, általános eset**(B). Bernoulli egyenlőtlenség. Számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség (B).

2. (i) Számsorozat. Korlátosság. **Határérték.** Divergens számsorozat, típusai. Fix $p > 0$-ra $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = ?$

   (ii) Konvergencia és korlátosság kapcsolata, mindkét irány(B). Határérték tulajdonságai.**Cauchy sorozat, konvergenciája** (B).

   (iii) **Az e szám értelmezése** (B). Előállítása végtelen összegként. Nevezetes sorozat határértékek e kapcsán. Nullsorozat. Tulajdonságok.

3. (i) **Részsorozat**, példák. Monoton részsorozat létezése (B). **Bolzano-Weierstrass tétel.** (B)

   (ii) Határérték monotonitása. **Rendőrelv sorozatokra.** (B) Nevezetes sorozat határértékek, pl $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sin(x)}{x} = ?$ racionális törtek.

   (iii) Számtani-átlag sorozat. Ennek határértéke. (B) **Torlódási pont**, kapcsolat a határértékkel. (B) $\overline{lim}$ és $\underline{\lim}$.

4. (i) **Végtelen sor. Konvergencia**, szükséges feltétele. (B) Divergencia teszt.

   (ii) **Végtelen mértani sor, konvergencia feltétele**, sor összege (B). Koch görbe kerülete (*és területe*).

   (iii) **Cauchy kritérium számsorokra** (B). Összehasonlító kritériumok végtelen sorokra: majoráns és minoráns kritériumok.

5. (i) **Abszolút konvergens sor**. Kapcsolat konvergenciával (B). **Hányados-kritérium** (B), gyengített változata.

   (ii) **Gyökkritérium** (B), gyengített változata (B). **Feltételesen konvergens sor**. Példák.

   (iii) **Leibniz-sor**. Konvergenciája (B). Riemann tétel végtelen sorok átrendezéséről.

6. (i) Függvény definíció, alaptulajdonságok. Összetett függvény. **Inverz függvény létezése**. **Trigonometrikus függvények inverzei**

   (ii) **Folytonosság adott pontban**, geometriai jelentés. Sorozatfolytonosság ill. folytonosság (B). **Határérték és folytonosság kapcsolata**.

   (iii) Folytonos függvények tulajdonságai. **Bolzano tétel** (B). Következmények.

   (iv) $[a, b]$-n értelmezett folytonos függvények: **Weierstrass 1. és 2. tétele** (B)

7. (i) **Függvény határértéke véges pontban.** Egyoldali határértékek.

   (ii) Szakadási helyek osztályozása. Példák. Határérték tulajdonságai: pl. monoton függvény (B). Nevezetes függvény határértékek.

   (iii) Rendőr elv függvény határértékére (B). **Határérték-fogalom kiterjesztése**, példák. Átviteli elv határérték kiszámítására.

   (iv) **Egyenletes folytonosság.** Példa ennek teljesülésére és nem-teljesülésére. Elégséges feltétel: Heine tétel.

8. (i) Differenciahányados és **differenciálhányados**. Geometriai és fizikai jelentés. **Folytonosság és differenciálhatóság kapcsolata**. (B) Elemi függvények deriváltja (B).

   (ii) **Differenciálási szabályok** (B). Láncszabály. Érintő egyenes egyenlete.

   (iii) **Inverz függvény deriváltja** (B), ennek szemléletes jelentése. **Rolle középérték tétel** (B).

9. (i) Lagrange féle középérték tétel (B). Következmény: **Integrálszámítás I. alaptétele.** (B) Magasabb rendű deriváltak.

   (ii) **Trigonometrikus függvények inverzeinek deriválása**. (B) Hiperbolikus függvények, tulajdonságok, ezek deriváltjai.

   (iii) Cauchy-féle középérték tétel. **L'Hospital szabály.** (B) Általános esetei.

10. (i) Lokális és globális szélsőértékek. Lokális szélsőérték létezésének **szükséges feltétele**. (B) Monoton differenciálható függvények jellemzése (B)

    (ii) **Konvex és konkáv függvények**. Ezek jellemzése differenciálható függvények esetén. Inflexió. Lokális szélsőérték létezésének elégséges feltétele. (B)

    (iii) **Taylor polinom, tulajdonságai** (B). Lagrange-féle maradéktag.

11. (i) **Primitív függvény**. Határozatlan integrál alaptulajdonságai (B).

    (ii) **Riemann-integrál, szemléletes jelentés.** Integrál közelítő összegek, ezek alaptulajdonságai (B). **Riemann integrál definíció.** Nem integrálható függvényre példa.

    (iii) Riemann integrál alaptulajdonságai. Oszcillációs összeg. **Integrálhatóság** 3 **elégséges feltétele.** (*egyikre* (B))

    (iv) Integrálközép. Integrál középérték tétel. (B) **Newton-Leibniz tétel.** (B)

12. (i) Integrálfüggvény. **Integrálszámítás II. alaptétele.** (B)

    (ii) **Parciális integrálás.** Alapesetek. (B)

    (iii) **Helyettesítés integrálban, határozott alak**. Integrálszámítás alkalmazásai: Jordan görbe ívhossza (B), forgástest térfogata.

13. (i) Lokálisan integrálható függvény. **Improprius integrál.** Alaptulajdonságok. Majoráns és minoráns kritérium improprius integrál létezésére.

    (ii) **Hatványfüggvény improprius integrálja** $(0,1)$**-ben** (B). Elégséges feltétel integrálhatóságra nem korlátos függvény esetén.

(iii) **Hatványfüggvény improprius integrálja** $(1, \infty)$**-ben.** (B) Elégséges feltétel improprius integrálhatóságra az $[1, \infty)$ intervallumon a hatványfüggvényhez kapcsolódóan.

14. (i) Differenciálegyenlet értelmezése, megoldása. **Cauchy-feladat.** Általános és partikuláris megoldás. Növekedési folyamat.

    (ii) **Szeparábilis DE. Megoldása.** (B) Robbanás egyenlete, látszólagos ellentmondás feloldása. (B)

    (iii) Homogén lineáris DE megoldások struktúrája. (B) **Homogén LDE általános megoldása**.

    (iv) Inhomogén LDE: megoldások struktúrája. **Állandók variálása** (B). Inhomogén LDE általános megoldása.

15. (i) Függvénysorozatok. **Pontonkénti és egyenletes konvergencia.** Cauchy kritérium. Elégséges feltétel egyenletes konvergenciára. (B).

    (ii) Függvénysor. Összegfüggvény tulajdonságai: **folytonosság** (B), **derivált** és **integrál**.

    (iii) **Taylor sor.** Taylor sor és az eredeti függvény kapcsolata. Konvergencia elégséges feltétele. (B). Alapfüggvények: $\mathbf{e^x}$ (B), $\sin(\mathbf{x})$ (B), $\cos(\mathbf{x})$(B).