Matematikai indukciós feladatok

A bizonyítás menete szimbólikusan így összegezhető:

$$P(1)$$
$$P(k) \Rightarrow P(k+1)$$
$$\overline{}$$
$$\Rightarrow P(n) \text{ igaz bármely } n \in \mathbf{N} \text{ esetén.}$$

A bizonyításnak a "P(k) ⇒ P(k +1)" részét az *indukciós lépésnek* nevezzük; az a feltételezés, hogy P(k) igaz, az *indukció feltétele*.

1)
Bizonyítsuk be, hogy $0+1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2} \qquad (n \in \mathbf{N})$.

2)
Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n} \qquad (n \in \mathbf{N} \wedge n>1).$$

3)
Bizonyítsuk be, hogy

$$1\cdot 4+2\cdot 7+\ldots+n(3n+1)=n(n+1)^2 \qquad (n \in \mathbf{N} \wedge n \geq 1).$$

4)
Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1} \qquad (n \in \mathbf{N} \wedge n \geq 1).$$

6)
Egy sorozatra $a_1=1$ és $a_n=2a_{n-1}+1$.

Bizonyítsuk be, hogy $a_n=2^n-1 \qquad (n \in \mathbf{N} \wedge n \geq 1)$.

7)
Bizonyítsuk be teljes indukcióval, hogy

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3} \qquad (n \in \mathbf{N} \wedge n \geq 1).$$

8)
Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} \qquad (n \in \mathbf{N} \wedge n \geq 1).$$

9)
Mennyi az $(1+1)\cdot\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\cdot\ \ldots\ \cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \qquad (n \in \mathbf{N} \wedge n \geq 1)$ szorzat értéke?