

Matematikai Analízis I.

Vágó Zsuzsanna

2023

Tartalomjegyzék

1. Valós számok	1
1.1. Természetes számok	2
1.2. Teljes indukció	2
1.3. Valós számok értelmezése	4
1.3.1. Axiómák*	6
1.3.2. Irracionális számok bevezetése	8
1.4. A valós számok részhalmazai	11
1.4.1. Infimum és supremum	11
1.4.2. Topológiai alapfogalmak	14
1.5. Néhány alap-egyenlőtlenség	16
1.5.1. Háromszög egyenlőtlenség	16
1.5.2. Számtani és mértani közép	18
2. Számsorozatok, számsorok	23

2.1. Számsorozatok	24
2.1.1. Alapfogalmak	24
2.1.2. Határérték	24
2.1.3. Konvergens sorozatok tulajdonságai	29
2.1.4. A határérték alaptulajdonságai	31
2.1.5. Részsorozatok	34
2.1.6. Cauchy sorozatok	37
2.1.7. Konvergenciák összehasonlítása	38
2.1.8. Számtani átlag-sorozatok*	42
2.1.9. Torlódási pont	44
2.2. Végtelen sorok	46
2.2.1. Végtelen sor konvergenciája	47
2.2.2. Összehasonlító kritériumok	50
2.2.3. Abszolút konvergens sorok	53
2.2.4. Hányados-kritérium	54
2.2.5. Gyökkritérium	57
2.2.6. Leibniz sorok	58
3. Valós függvények	63
3.1. Bevezetés	64
3.1.1. Alaptulajdonságok	64

3.1.2. Elemi függvények*	67
3.2. Folytonosság, határérték	70
3.2.1. A folytonosság értelmezése	70
3.2.2. Határérték	74
3.2.3. Átviteli elv	78
3.2.4. A határérték tulajdonságai	79
3.2.5. Folytonos függvények tulajdonságai	86
3.2.6. Inverz függvény	89
3.2.7. Hiperbolikus függvények	92
3.2.8. Korlátos és zárt halmazon folytonos függvények	93
3.2.9. Nevezetes határértékek	95
3.2.10. Egyenletes folytonosság*	98
4. Differenciálszámítás	103
4.1. Differenciálhányados, derivált	104
4.2. Differenciálási szabályok	109
4.3. Inverz függvény deriváltja	115
4.3.1. Trigonometrikus inverz-függvények deriváltja	116
4.4. Differenciálszámítás alkalmazásai	117
4.4.1. Lokális szélsőérték	117
4.4.2. Középérték tételek	119

4.4.3.	Monoton függvények jellemzése	123
4.4.4.	Konvex és konkáv függvények	124
5.	Integrálszámítás	127
5.1.	Határozatlan integrál	128
5.1.1.	Primitív függvény és határozatlan integrál	128
5.2.	Riemann integrál	131
5.2.1.	Riemann integrál, mint terület	131
5.2.2.	Az integrál kiszámítása	137
5.2.3.	Integrálközép	141
5.2.4.	Parciális integrálás	142
5.2.5.	Helyettesítés integrálban	146
5.2.6.	Integrálfüggvény	147
5.3.	Improprius integrál	149
5.3.1.	Az improprius integrál definíciója	149
5.3.2.	Hatványfüggvény integrálja	151
5.3.3.	Kritériumok improprius integrálokra	153
5.3.4.	A Γ függvény*	157
5.4.	Integrálszámítás alkalmazásai	158
5.4.1.	Függvény gráfjának ívhossza	158
5.4.2.	Forgástest felszíne és térfogata*	160

6. Differenciálegyenletek 163

6.1. Bevezetés 164

6.1.1. Egy példa 164

6.1.2. Mit nevezünk differenciálegyenletnek? 165

6.2. Speciális differenciálegyenletek 169

6.2.1. Szeparábilis differenciálegyenlet 169

6.2.2. Lineáris differenciálegyenlet 171

6.3. Differenciálegyenletek a fizikában* 174

7. Taylor polinom. Taylor sor 181

7.1. Elsőfokú Taylor polinom 182

7.2. n -ed fokú Taylor polinom 1837.3. Taylor polinom határértéke $n \rightarrow \infty$ 185

7.4. Taylor sor 186

1. fejezet

Valós számok

1.1. Természetes számok

A jegyzetben $\mathbb{N}$ jelöli a természetes számok halmazát. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Az $\mathbb{N}$ halmaznak két fontos alaptulajdonsága a következő:

1. Van legkisebb elem, ez 1 (egység).
2. Mindegyik elem után van közvetlenül következő: $n \rightarrow n + 1$

Megjegyzés. Más könyvekben néha előfordul, hogy a természetes számok halmazát az $n = 0$ számmal kezdik. Itt $\mathbb{N}_0$ fogja jelölni a 0-val kibővített természetes számok halmazát.

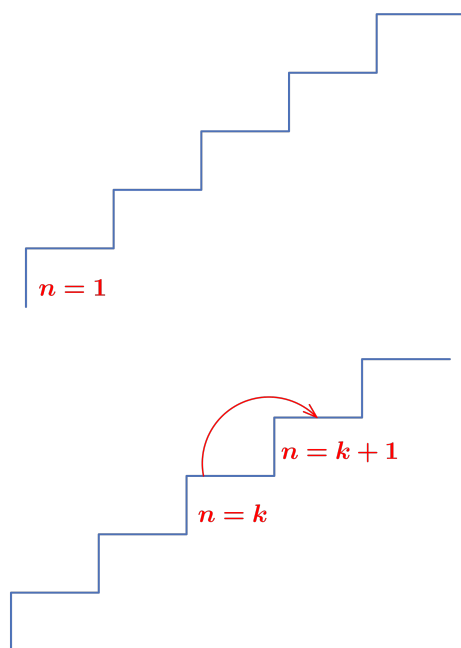
1.2. Teljes indukció

Tipikus feladat egy képlet bizonyítása. Sokszor ezt megelőzi egy sejtés.

1.1. Állítás. *(Valamely) A_n tulajdonság igaz minden $n \in \mathbb{N}$ számra igaz. (Például: "Minden $n \in \mathbb{N}$ szám érdekes.")*

Bizonyítás menete:

1. *Kiinduló lépés.* Belátjuk, hogy A_1 teljesül.
2. *Indukciós lépés.* Belátjuk, hogy minden rögzített k -ra: A_k teljesülése esetén A_{k+1} is igaz.



Megjegyzés. A teljes indukciót úgy képzelhetjük el, mintha fel kellene mennünk egy végtelen hosszú lépcsőn. Ha meg tudjuk tenni az első lépést, és bármely lépcsőfokról eggyel feljebb tudunk jutni, akkor valóban bármilyen magasra fel tudunk menni.

1. Gyakorlat. Igazoljuk teljes indukcióval, hogy *minden természetes szám szép*.

Megjegyzés. A teljes indukció nem mindig $n = 1$ -gyel kezdődik, hanem azzal a legkisebb természetes számmal, ahonnan a adott tulajdonság érvényes.

Példa. Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (1.1)$$

Bizonyítás teljes indukcióval.

1. 1. *Kiinduló lépés.*

$n = 1$ esetén az állítás igaz, hiszen $n = 1$ esetén az (1.1) képlet:

$$1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}. \quad \checkmark$$

2. 2. *Indukciós lépése.*

Tegyük fel, hogy egy rögzített n -re teljesül az állítás (ez az *indukciós feltevés*.) Nézzük meg, mit mondhatunk, ha $n + 1$ számot adunk össze:

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}_{+} + (n + 1)^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} + (n + 1)^2 = (*)$$

Felhasználtuk az indukciós feltevést. Egyszerű algebrai átalakításokkal folytathatjuk:

$$(*) = \frac{(n + 1)}{6}(n(2n + 1) + 6n + 6) = \frac{(n + 1)(n + 2)(2n + 3)}{6},$$

ami épp az (1.1) képlet, ha n helyére $n + 1$ kerül.

1.3. Valós számok értelmezése

Az $\mathbb{N}$ halmazból kiindulva egyre bővebb számhalmazokat lehet értelmezni:

A számfogalom felépítésének első lépése volt: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

A természetes számok halmazán értelmezve van két művelet, az összeadás (+) és szorzás ($\cdot$), továbbá a $<$ rendezési reláció.

1. Egyik művelet az $\mathbb{N}$ halmazon: *összeadás*. $13 + 134 = \checkmark$

Az inverz kérdés $13 + ? = 11$ megoldásával egy bővebb halmazt kapunk:

$$\longrightarrow \text{egész számok: } \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}.$$

2. Másik művelet az $\mathbb{N}$ halmazon: *szorzás*. $13 \cdot (-134) = \sqrt{\quad}$

Az inverz kérdés $13 \cdot ? = 11$ megoldásával egy még bővebb halmazt kapunk:

$$\longrightarrow \text{racionális számok: } \mathbb{Q} = \left\{ r = \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

3. *Hogyan tovább?*

$\mathbb{R}$ -et szeretnénk megfeleltetni a számegyenes pontjainak, természetes módon. Egyelőre "lyukas" a megfeleltetés. hiszen csak racionális számokig tudunk eljutni.

Egyik lehetséges út a valós számok *axiomatikus* értelmezése. Ennek alapjait röviden leírjuk.

Adott egy $\mathbb{R}$ halmaz, melynek elemeit **valós számoknak** nevezzük. A halmazban van két *kitüntetett elem*, ezek: 0 és 1 ($0 \neq 1$).

$\mathbb{R}$ -en definiálva van két művelet, az összeadás (+) és a szorzás ($\cdot$), valamint egy $<$ rendezési reláció.

A műveletek és a rendezés tulajdonságait AXIÓMÁKBAN adjuk meg. Az axiómák *triviális alaptulajdonságok*, melyeket bizonyítás nélkül elfogadunk.

A pozitív valós számok halmazát $\mathbb{R}^+$ jelöli.

Jelölések

$$\forall \quad = \quad \text{MINDEN}$$

$$\exists \quad = \quad \text{LÉTEZIK}$$

$$\exists! \quad = \quad \text{EGYÉRTELMŰEN LÉTEZIK}$$

1.3.1. Axiómák*

Megadjuk a valós számok felépítésére szolgáló egyik lehetséges axiómarendszert.

1. csoport: a műveletek alaptulajdonságai.

A1. Az összeadás asszociatív, azaz $(x + y) + z = x + (y + z)$

A2. $x + 0 = x$

A3. $\forall x \in \mathbb{R}$ -hez $\exists u \in \mathbb{R}$, melyre $x + u = 0$. Ezt a szám *ellentettje*.

A4. Az összeadás kommutatív, azaz $x + y = y + x$

A5. A szorzás asszociatív, azaz $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

A6. $x \cdot 1 = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

A7. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ -hoz $\exists v \in \mathbb{R}$, melyre $x \cdot v = 1$.

Ezt a szám reciprokának nevezzük.

A8. A szorzás kommutatív, azaz $x \cdot y = y \cdot x$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

A9. A szorzás disztributív az összeadásra, azaz

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

2. csoport: a rendezési reláció tulajdonságai.

R1. Tetszőleges $x \neq y$ esetén az $x < y$ és $y < x$ közül pontosan egy igaz.

R2. A rendezési reláció tranzitív, azaz ha $x < y$ és $y < z$, akkor $x < z$.

R3. Ha $x < y$, akkor $x + z < y + z$ minden $z \in \mathbb{R}$ esetén.

R4. Ha $x < y$ és $0 < z$, akkor $x \cdot z < y \cdot z$.

3. csoport:

Elsőként elkülönítjük $\mathbb{R}$ egy részhalmazát, melyet $\mathbb{N}$ jelöl, és az alábbi tulajdonságokkal rendelkezik:

- $1 \in \mathbb{N}$.
- Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor $n + 1 \in \mathbb{N}$.
- Bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $n + 1 \neq 1$ (vagyis 1 a legelső elem).
- Ha valamely $S \subset \mathbb{N}$ rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:

$$1 \in S, \quad \text{és} \quad \forall n \in S \quad \text{esetén} \quad n + 1 \in S,$$

akkor $S = \mathbb{N}$.

Ezt a részhalmazt **természetes számok**nak nevezzük.

14. (Archimedeszi axióma) Bármely $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ valós számhoz létezik $n \in \mathbb{N}$, melyre $b < na$.
15. (Cantor axióma) Adott korlátos és zárt intervallumok egy sorozata:

$$I_1 = [a_1, b_1], \quad I_2 = [a_2, b_2], \dots, I_n = [a_n, b_n], \dots \quad (1.2)$$

melyek egymásba skatulyázottak, azaz

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \dots \quad (1.3)$$

Ekkor van közös pont, azaz

$$\exists c \in \mathbb{R} \quad \text{melyre} \quad c \in I_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Megjegyzés. A Cantor axióma átfogalmazható a következőképp: Tegyük fel, hogy adottak az

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \dots$$

számok ("bal oldalak") és a

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n \dots$$

számok ("jobb oldalak"), melyekre teljesül, hogy:

$$a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ekkor létezik $c \in \mathbb{R}$, melyre

$$a_n \leq c \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.3.2. Irracionális számok bevezetése

Mielőtt bevezetnénk az irracionális számokat, vizsgáljuk meg két példán keresztül, hogy a Cantor axióma használatához milyen plusz feltételre van szükség.

Cantor-féle axióma, 1. példa

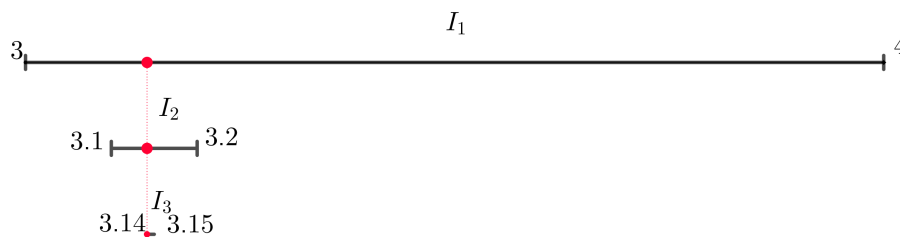
$$I_1 = [3, 4].$$

$$I_2 = [3.1, 3.2].$$

$\vdots$

$$I_8 = [3.14159265, 3.14159266]$$

$\vdots$



1.1. ábra. 1. Példa. Első 3 intervallum

Vajon mi a közös pont? Láthatóan ez a szám a π , ami NEM racionális.

Tehát a Cantor axióma biztosítja, hogy $\mathbb{R}$ -ben *irracionális* számok is vannak.

Cantor-féle axióma, 2. példa

$$I_1 = [0, 3].$$

$$I_2 = [1 - \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2}].$$

$$I_3 = [1 - \frac{1}{3}, 2 + \frac{1}{3}].$$

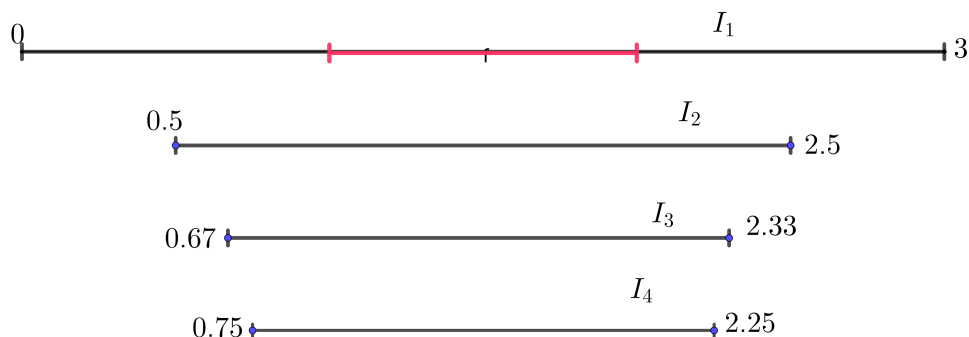
$$\vdots$$

$$I_n = [1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}].$$

$$\vdots$$

Vajon mi a közös pont? Láthatóan sok-sok közös pont van.

Első fontos tétel, amit az axiómák alapján bebizonyítunk a közös pont egyértelműségéről szól.



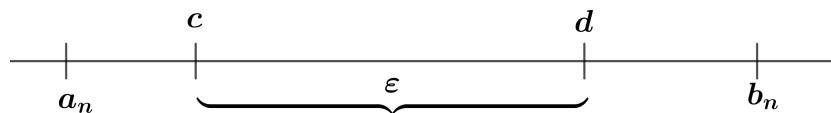
1.2. ábra. 2. Példa. Első 4 intervallum

1.1. Tétel (Cantor-féle közös-pont tétel). Legyen $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \supseteq I_n \dots$ **véges és zárt** intervallumok sorozata, $I_n = [a_n, b_n]$.

Tegyük fel, hogy $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists I_n$ intervallum, mely az adott ε -nál rövidebb, azaz $|I_n| = b_n - a_n < \varepsilon$.

Ekkor egyértelműen létezik a c közös pont, melyre $c \in I_n$ minden n -re.

Bizonyítás. A Cantor-axiómából következik, hogy létezik közös pont. Indirekt módon látjuk be az egyértelműséget. Feltesszük, hogy két közös pont van: $c, d \in I_n$ minden n -re, és például $c < d$.



1.3. ábra. A Cantor féle közös-pont-tétel bizonyítása

Legyen $\varepsilon = d - c > 0$. Ekkor a feltétel szerint $\exists n \in \mathbb{N}$, amire $b_n - a_n < \varepsilon$.

Ekkor mivel

$$c \in [a_n, b_n], \quad d \in [a_n, b_n],$$

ezért $\varepsilon = d - c \leq b_n - a_n < \varepsilon$, ami ellentmondás.

1.4. A valós számok részhalmazai

1.4.1. Infimum és supremum

1.1. Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}$ a valós számok halmazának egy részhalmaza.

1. A H halmaz **alulról korlátos**, ha van olyan $k \in \mathbb{R}$, melyre

$$k \leq x \quad \forall x \in H.$$

2. A H halmaz **felülről korlátos**, ha van olyan $K \in \mathbb{R}$, melyre

$$x \leq K \quad \forall x \in H.$$

3. A H halmaz **korlátos**, ha alulról és felülről is korlátos.

1.2. Definíció. Legyen H egy alulról korlátos nem üres halmaz. A halmaz legnagyobb alsó korlátját **infimumnak** nevezzük. Jele $\inf(H)$.

Más szóval, az $s \in \mathbb{R}$ szám a H halmaz infimuma, ha teljesülnek az alábbiak:

1. Egyrészt s alsó korlát, azaz

$$s \leq x, \quad \forall x \in H.$$

2. Másrészt ha s' egy tetszőleges alsó korlátja H -nak, akkor

$$s' \leq s.$$

Megmutatható, hogy az alsó korlátok közt létezik legnagyobb.

1.3. Definíció. Legyen H egy felülről korlátos nem üres halmaz. A halmaz legkisebb felső korlátját **supremumnak** nevezzük. Jele $\sup(H)$.

Más szóval, az $S \in \mathbb{R}$ szám a H halmaz supremuma, ha teljesülnek az alábbiak:

1. Egyrészt S felső korlát, azaz

$$S \geq x, \quad \forall x \in H.$$

2. Másrészt ha S' egy tetszőleges felső korlátja H -nak, akkor

$$S' \geq S.$$

Megmutatható, hogy a felső korlátok közt van legkisebb.

1. *Példa.* Legyen $H = [a, b]$ zárt intervallum. Ekkor

$$\inf(H) = a, \quad \sup(H) = b.$$

Megjegyzés. Ha van H elemei közül legkisebb, akkor ez az infimum. Tehát ha H -ban létezik minimum, akkor

$$\inf(H) = \min(H).$$

Hasonlóan, ha a halmazban van maximális elem, akkor

$$\sup(H) = \max(H).$$

2. *Példa.* Legyen $H = (a, b)$ nyílt intervallum. Ekkor is

$$\inf(H) = a, \quad \sup(H) = b.$$

Megjegyzés. A fenti példákból is látszik, hogy $\inf(H) \in H$ vagy $\inf(H) \notin H$ is előfordulhat.

3. *Példa.* Legyen $H = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

Ekkor nyilván $\sup(H) = \max(H) = 1$. Legkisebb eleme nincs a halmaznak. Belátjuk, hogy $\inf(H) = 0$. Nyilván $0 \leq 1/n$ minden n -re, tehát a 0 alsó korlát. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Belátjuk, hogy ε nem lehet alsó korlát. Valóban, legyen

$$N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \quad (\text{egész rész}).$$

Ekkor

$$\varepsilon > \frac{1}{N+1} \in H.$$

Igazoljunk kell, hogy a fenti infimum és supremum jól definiáltak.

1.2. Tétel. Minden alulról korlátos, nem üres H halmaznak VAN infimuma.

Bizonyítás* Konstrukcióval igazoljuk az infimum létezését. Mivel H alulról korlátos, ezért van alsó korlátja. Legyen a_1 egy alsó korlát.

1. eset. Ha $a_1 \in H$, akkor ez minimális elem, egyben infimum is.

2. eset. Ha $a_1 \notin H$, akkor legyen $b_1 \in H$ tetszőleges, $b_1 > a_1$. Legyen $I_1 = [a_1, b_1]$ egy zárt intervallum, és definiáljuk a $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ számot.

Kétféle folytatás lehetséges.

a) Ha c_1 alsó korlát, akkor legyen $a_2 := c_1$ és $b_2 := b_1$. Ha ráadásul $c_1 \in H$ is teljesül, akkor minimális elem, egyben infimum is.

b) Ha c_1 nem alsó korlát, akkor legyen $a_2 := a_1$ és $b_2 := c_1$. (Ha esetleg $c_1 \notin H$, akkor $b_2 \in H$ -t válasszuk meg úgy, hogy $a_2 < b_2 < c_1$ legyen.)

$I_2 = [a_2, b_2]$ intervallum hossza biztosan rövidebb (vagy egyenlő), mint I_1 hosszának fele. Ezen kívül a_2 alsó korlát, $b_2 \in H$.

Ezt a konstrukciót folytatva vagy "ráatalálunk" véges lépésben a minimumra, vagy egy végtelen I_k intervallum-sorozatot kapunk, melyre:

- (i) $I_k = [a_k, b_k]$ zárt és $I_{k+1} \subset I_k$,
- (ii) I_{k+1} hossza rövidebb, mint $2^{-k}|I_1|$,
- (iii) a_k alsó korlát és $b_k \in H$ minden k -ra.

Az (i) és (ii) tulajdonságok miatt az intervallumsorozat teljesíti a 1.1 Tétel feltételeit, ezért az intervallumoknak egyértelműen létezik közös pontja, legyen ez s . Belátjuk, hogy

$$s = \inf(H).$$

Ehhez egyrészt igazolni kell, hogy s alsó korlát. Ha ugyanis lenne egy olyan $h \in H$ elem, melyre $h < s$ teljesülne, akkor a (ii) tulajdonság miatt találnánk egy olyan I_k intervallumot, melyre $h < a_k \leq s$ lenne, ami ellentmond annak, hogy a_k alsó korlát.

Hasonlóképp igazoljuk, hogy nincs s -nél nagyobb alsó korlát. Ha ugyanis indirekt módon feltesszük, hogy van ilyen $s' > s$ alsó korlát, akkor találunk egy I_k intervallumot, melyre $s \leq b_k < s'$. De mivel $b_k \in H$ minden k -ra, így ez sem lehetséges.

1.1. Következmény. *Minden nem üres, felülről korlátos H halmaznak létezik supremuma.*

1.4.2. Topológiai alapfogalmak

1.4. Definíció. *Egy x_0 valós szám **környezetei** az*

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

nyílt intervallumok, ahol $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

1.5. Definíció. Adott $H \subseteq \mathbb{R}$ tetszőleges részhalmaz.

Az $x_0 \in \mathbb{R}$ pont a H halmaz **belső pontja**, ha $\exists \varepsilon > 0$, hogy

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq H.$$

A belső pontok halmazát $\text{int}(H)$ jelöli. (Az *INTERIOR* szó rövidítéséből.)

Az $x_0 \in \mathbb{R}$ pont a H halmaz **külső pontja**, ha $\exists \varepsilon > 0$, hogy

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap H = \emptyset.$$

A külső pontok halmazát $\text{ext}(H)$ jelöli. (Az *EXTERIOR* szó rövidítéséből.)

$x_0 \in \mathbb{R}$ a H halmaz **határpontja**, ha se nem külső, se nem belső pontja.

Ez azt jelenti, hogy $\forall \varepsilon > 0$ mellett az $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ környezet tartalmaz H -beli és H -n kívüli pontokat is. A határpontok halmazát ∂H jelöli.

1.6. Definíció. A H halmaz **nyílt**, ha minden pontja belső pont.

A H halmaz **zárt**, ha minden határpontját tartalmazza. Egy H halmaz **lezárását** úgy kapjuk meg, hogy hozzávesszük a határpontokat. $\overline{H} = H \cup \partial H$.

1. *Példa.* Legyen $H = (a, b)$ egy nyílt intervallum. Belső pontok halmaza:

$$\text{int}(H) = \{x : a < x < b\}.$$

A határpontok halmaza: $\partial(H) = \{a, b\}$. A lezárás

$$\overline{H} = \text{int}(H) \cup \partial H = [a, b].$$

2. *Példa.* Legyen $H = \{0 < x < 1 : x \in \mathbb{Q}\}$.

Ebben a halmazban belső pont NINCS. Hiszen például az $\frac{1}{2}$ pontnak nincs olyan $(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon)$ környezete, amire teljesülne, hogy $(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon) \subseteq H$. Bármely kicsi intervallumban van racionális és irracionális szám is, ezért nincs olyan $(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon)$ intervallum, melyben *csak racionális* számok lennének.

Így H minden pontja határpont! Hasonló meggondolással igazolható, hogy a $[0, 1]$ -beli irracionális számok is határpontok.

Tehát a halmaz határpontjai:

$$\partial H = \{x : 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1]. \quad (!)$$

1.5. Néhány alap-egyenlőtlenség

1.5.1. Háromszög egyenlőtlenség

1.2. Állítás. *Tetszőleges a, b valós számokra*

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Bizonyítás. Abból a triviális egyenlőtlenségből indulunk ki, hogy

$$\pm a \leq |a|, \quad \pm b \leq |b|.$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$a + b \leq |a| + |b|, \quad -a - b \leq |a| + |b|,$$

és ebből az állítás következik.

Megjegyzés. Az elnevezés vektorokra utal, ott valóban egy háromszög három oldalának hosszáról van szó.

1.2. Következmény. *(1.2.Á általános háromszög egyenlőtlenség)*

Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ esetén adottak az $a_1, a_2, \dots, a_n$ valós számok. Ekkor

$$|a_1 + \dots + a_n| \leq |a_1| + \dots + |a_n|,$$

azaz

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|. \quad (1.4)$$

Bizonyítás. Teljes indukcióval. $n = 2$ esetén beláttuk az állítást.

Tegyük fel, hogy valamely $n \geq 2$ -re (1.4) igaz. Vizsgáljuk $n + 1$ -re

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1} \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| + |a_{n+1}|,$$

ahol a két tagú összegre vonatkozó tulajdonságot használtuk. Ezután a jobb-
oldal első tagjára az indukciós feltételt alkalmazhatjuk.

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|.$$

1.3. Tétel. *(Bernoulli egyenlőtlenség.) Tetszőleges $n \in \mathbb{N}_0$ természetes szám és $h \geq -1$ valós szám esetén teljesül az alábbi összefüggés:*

$$(1 + h)^n \geq 1 + hn. \quad (1.5)$$

Bizonyítás* $h = 0$ esetén egyenlőség van.

$h \neq 0$ esetén teljes indukcióval látjuk be az állítást.

1. Ha $n = 1$ akkor

$$(1 + h)^1 = 1 + h,$$

tehát az állítás igaz.

2. Tegyük fel, hogy valamely n -re igaz:

$$(1 + h)^n \geq 1 + hn,$$

majd tekintsük az egyenlőtlenség baloldalát $n + 1$ -re:

$$\begin{aligned} (1 + h)^{n+1} &= (1 + h)^n(1 + h) \geq (1 + nh)(1 + h) = \\ &= 1 + (n + 1)h + nh^2 \geq 1 + (n + 1)h. \end{aligned}$$

A fenti átalakítások során felhasználtuk az indukciós feltevést és elhagytuk az nh^2 pozitív tagot.

1.5.2. Számtani és mértani közép

Tekintsünk két nemnegatív valós számot, $x, y \geq 0$. Ezek **számtani közepe** (számtani átlaga)

$$A = \frac{x + y}{2},$$

és **mértani közepe** (mértani átlaga)

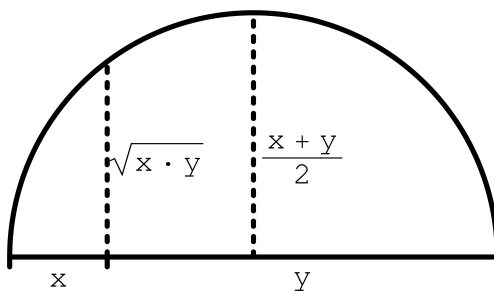
$$G = \sqrt{xy}.$$

1.3. Állítás. *Tetszőleges $x, y \geq 0$ valós számok esetén*

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy},$$

és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x = y$.

2. Gyakorlat. A fenti állítás szemléletes módon igazolható a 1.4. ábra alapján. Igazolja.



1.4. ábra. A számtani és mértani közép geometriai ábrázolása

1.4. Tétel (Számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség). *Legyenek $a_1, a_2, \dots, a_n$ nemnegatív valós számok. Ezek számtani átlaga (más elnevezéssel számtani közepe)*

$$A_n := \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k,$$

és mértani átlaga (vagy mértani közepe)

$$G_n := \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k}.$$

Ekkor

$$A_n \geq G_n \quad \text{minden } n \text{ -re,}$$

és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Kiegészítő tananyag. A fenti állítást analitikus eszközökkel általános esetben látjuk be.

A Tétel bizonyításához kezdetnek két lemmát igazolunk.

1.1. Lemma. *Legyen $n \geq 2$ adott természetes szám. Legyenek $x_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$ olyan számok, amelyek közt van legalább kettő különböző, és átlaguk 1, azaz*

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = 1.$$

Ekkor $x_1 x_2 \dots x_n < 1$.

Bizonyítás. Teljes indukcióval látjuk be a lemmát.

1. Ha $n = 2$, akkor a lemma állítása igaz, hiszen a két szám

$$x_1 = 1 + t, \quad x_2 = 1 - t, \quad t > 0.$$

Ezekre a számokra

$$(1 - t)(1 + t) = 1 - t^2 < 1.$$

2. Tegyük fel hogy valamely rögzített n -re igaz az állítás. Tekintsünk $n+1$ db számot, melyek számtani átlaga 1, és ezeket írjuk az alábbi alakba:

$$\begin{aligned}x_1 &= 1 + t_1, \\x_2 &= 1 + t_2, \\&\vdots \\x_n &= 1 + t_n, \\x_{n+1} &= 1 + t_{n+1}.\end{aligned}$$

Ekkor a $t_1, \dots, t_{n+1}$ számok közt van pozitív es negatív is, mert összegük 0 és nem mind egyforma. Feltehető például, hogy $t_n < 0 < t_{n+1}$. Nézzük az $n+1$ tényezős szorzatot:

$$\begin{aligned}x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n x_{n+1} &= x_1 x_2 \dots x_{n-1} (1 + t_n)(1 + t_{n+1}) < \\&< x_1 x_2 \dots x_{n-1} (1 + t_n + t_{n+1}),\end{aligned}$$

ahol az utolsó tényezőből elhagytuk a $t_n t_{n+1} < 0$ tagot. A szorzat utolsó tényezőjét jelölje $x_n^* = 1 + t_n + t_{n+1}$. Ekkor egy n tényezős szorzatunk van, a tényezők összege:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + 1 + t_n + t_{n+1} &= \\&= (n-1) + t_1 + \dots + t_{n-1} + 1 + t_n + t_{n+1} = n.\end{aligned}$$

Tehát adott n db szám, $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^*$, melyek átlaga 1. Ha az így kapott számok egyformák, akkor szorzatuk $= 1$. Ha nem egyformák, akkor az indukciós feltevés miatt szorzatuk < 1 .

Ezek után megfogalmazhatjuk az fenti lemmát kicsit általánosabban:

1.2. Lemma. *Legyenek $x_k \geq 0$, $k = 1, \dots, n$ olyan számok, amelyekre*

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = 1.$$

Ekkor

$$x_1 x_2 \dots x_n \leq 1.$$

A Tétel bizonyítása. Ha adottak az $a_1, a_2, \dots, a_n$ számok, akkor legyen

$$A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

és legyenek

$$x_k = \frac{a_k}{A}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Ekkor

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{A} = n,$$

ezért

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = 1,$$

így alkalmazhatjuk ezekre a számokra a 1.2. Lemmát. Tehát

$$x_1 x_2 \dots x_n \leq 1,$$

azaz

$$\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{A^n} \leq 1.$$

Ezt az egyenlőtlenséget átrendezve kapjuk a Tétel állítását:

$$\prod_{k=1}^n a_k \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right)^n.$$

2. fejezet

Számsorozatok, számsorok

2.1. Számsorozatok

2.1.1. Alapfogalmak

2.1. Definíció. *Számsorozat egy olyan hozzárendelés, melyben $\forall n \in \mathbb{N}$ természetes számhoz egy valós számot rendelünk. Az (a) sorozat n -dik elemét a_n jelöli, az egész sorozatot (a_n) -nel jelöljük.*

Az (a_n) sorozat **korlátos** ha $\exists K$ szám, hogy $|a_n| < K$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Az (a_n) sorozat **monoton növő**, ha $\forall n < m$ esetén $a_n \leq a_m$. (Nagyobb indexhez nem kisebb elem tartozik.) Az (a_n) sorozat **monoton fogyó**, ha $\forall n < m$ esetén $a_n \geq a_m$ (nagyobb indexhez nem nagyobb elem tartozik.)

2.1.2. Határérték

Arra leszünk kíváncsiak, hogy n növelésével mi történik az a_n számokkal.

Példa. Egy $a \in \mathbb{R}$ irracionális szám esetén legyen a_n az első n db jegy a végtelen tizedestört felírásában. Ekkor a_n "egyre közelebb kerül" a -hoz. Ezt így jelölhetjük: $a_n \rightarrow a$.

Mielőtt pontosan definiálnánk a határértéket, egy-két példát tekintünk.

1. *Példa.* Legyen $a_n = \frac{1}{n}$. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ mellett az $(-\varepsilon, \varepsilon)$ intervallumot tekintjük. Ekkor $\exists N$ küszöbindex, amire $a_N \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ és pedig legyen

$$N > \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1,$$

ahol $[x]$ jelöli az x szám egész részét (az x -nél *nem nagyobb* egészek közül a legnagyobbat). Ekkor

$$\frac{1}{N} < \frac{1}{\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1} < \varepsilon$$

sőt $\forall n > N$ -re $a_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, tehát a_n "tart" 0-hoz. Így jelöljük: $a_n \rightarrow 0$.

2. *Példa.* Legyen $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, azaz a sorozat tagjai

$$-1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{5}; \dots$$

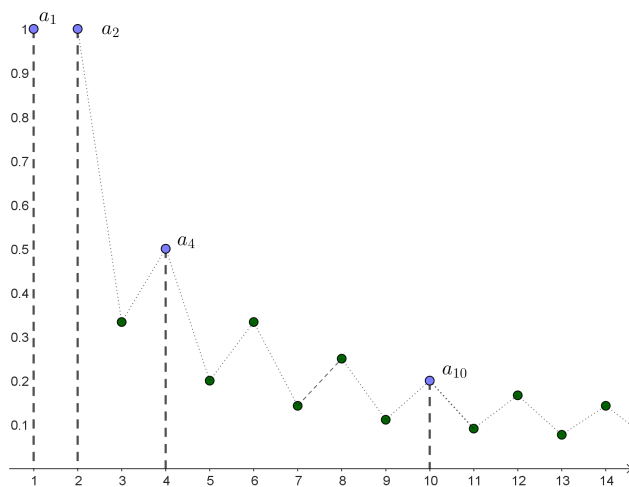
Ekkor is $a_n \rightarrow 0$, mert $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists N$ küszöbindex, amire teljesül, hogy $\forall n > N$ esetén $|a_n| < \varepsilon$.

3. *Példa.* Legyen

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2n} & \text{ha } n = 2k \\ \frac{1}{n} & \text{ha } n = 2k + 1 \end{cases}.$$

A sorozat elemei

$$a_1 = 1; \quad a_2 = \frac{1}{4}; \quad a_3 = \frac{1}{3}; \quad a_4 = \frac{1}{8}; \quad a_5 = \frac{1}{5}; \quad \dots$$



2.1. ábra. A 3. példa sorozata

Nyilván most is $a_n \rightarrow 0$.

4. *Példa.* Legyen

$$a_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Ekkor a_n -nek az 1-től való eltérése csökken és tart a 0-hoz. Így $a_n \rightarrow 1$.

5. *Példa.* Legyen $p > 0$ tetszőleges rögzített szám és legyen $a_n = \sqrt[n]{p}$. Hova tart az (a_n) sorozat? Például $p = 2$ esetén a sorozat

$$a_1 = 2, \quad a_2 = \sqrt{2}, \quad a_3 = \sqrt[3]{2}, \quad \dots$$

Három eset van:

1. *eset.* Ha $p = 1$, ekkor $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = 1$, így $a_n \rightarrow 1$.

2. *eset.* Ha $p > 1$, ekkor $\sqrt[n]{p} > 1$, ez felírható összegként:

$$\sqrt[n]{p} = 1 + h_n,$$

ahol $h_n > 0$. Így $p = (1 + h_n)^n$, és a Bernoulli egyenlőtlenséget alkalmazva

$$p = (1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n.$$

Ezt átrendezve

$$h_n \leq \frac{p-1}{n}.$$

Mivel

$$\frac{p-1}{n} \rightarrow 0,$$

ezért $h_n \rightarrow 0$. Így most is $\sqrt[n]{p} \rightarrow 1$.

3. *eset.* Ha $p < 1$, akkor $1/p > 1$, tehát a 2. esetnél leírtak miatt

$$\sqrt[n]{\frac{1}{p}} \rightarrow 1$$

is teljesül. Mivel

$$\sqrt[n]{\frac{1}{p}} = \frac{1}{\sqrt[n]{p}},$$

ezért $\sqrt[n]{p} \rightarrow 1$.

2.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat **konvergens** és **határértéke** az A szám, ha ez rendelkezik a következő tulajdonsággal:

$\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists N = N(\varepsilon)$ (egy ε -tól függő N küszöbindex), melyre

$$|a_n - A| < \varepsilon \quad \forall n > N.$$

Ezt így jelöljük

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A.$$

2.1. Állítás. Ha egy (a_n) sorozatnak van határértéke, akkor a határérték egyértelmű.

Bizonyítás* Indirekt úton. Tegyük fel, hogy két szám is rendelkezik a fenti tulajdonsággal, jelölje ezeket $A < B$. Válasszuk meg az ε számot úgy, hogy $\varepsilon < \frac{B-A}{2}$ legyen. Ekkor az $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ és a $(B-\varepsilon, B+\varepsilon)$ intervallumok diszjunktak, (nincs közös elemük). Ez ellentmondás, tehát a kiindulópontunk hibás volt, nem lehet két különböző határértéke egy sorozatnak.

6. *Példa.* Legyen

$$a_n = \frac{n^2 - 1}{n^2 + n + 1}.$$

Ekkor

$$a_n = \frac{n^2 + n + 1 - n - 2}{n^2 + n + 1} = 1 - \frac{n + 2}{n^2 + n + 1} = 1 - r_n.$$

Mivel

$$0 < r_n = \frac{n + 2}{n^2 + n + 1} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n},$$

és $1/n \rightarrow 0$, ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1) = 0$, azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

2.3. Definíció. Ha (a_n) nem konvergens, akkor **divergensnek** nevezzük.

Kétféle speciális divergenciát mutatunk be.

2.4. Definíció. Az (a_n) sorozat $+\infty$ -be **divergál**, ha $\forall K \in \mathbb{R}$ korláthoz megadható $N = N(K)$ küszöbindex, hogy ha $n > N$ akkor $a_n > K$. Ezt így jelöljük

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

Szokásos elnevezés, hogy (a_n) **minden határon túl nő**.

Hasonlóan, az (a_n) sorozat $-\infty$ -hez **divergál**, ha $\forall K$ -hoz $\exists N = N(K)$ küszöbindex, melyre ha $n > N(K)$, akkor $a_n < K$. Így jelöljük:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

Másik fajta gyakori divergencia, ha a sorozat elemei több pont körül torlódnak. Például, ha

$$a_n = (-1)^n,$$

akkor ennek a sorozatnak elemei:

$$-1; 1; -1; 1; -1; 1; \dots$$

Ez a sorozat nyilván nem konvergens.

Megadjuk az (előző definíció átfogalmazását, a határérték általános definícióját.) Ez a későbbiekben lesz fontos.

Definíció. Azt mondjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A,$$

ha A -nak tetszőleges U környezetéhez megadható $N = N(U)$ küszöbindex, melyre minden $n > N$ esetén $a_n \in U$. Ez a definíció alkalmazható $A \in \mathbb{R}$ vagy $A = \pm\infty$ esetén is.

Megjegyzés. Emlékeztetünk rá, hogy a környezetet definíciója szerint véges A mellett $U = (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$, így

$$a_n \in U \iff |a_n - A| < \varepsilon.$$

Ha $A = +\infty$ akkor ennek a környezetei a $U = (K, \infty)$ alakú, jobbról végtelen intervallumok. Ekkor

$$a_n \in U \iff a_n > K.$$

Megjegyzés. Konvergens sorozatból akárhány elemet elhagyva konvergens marad, és ugyanahhoz a számhoz fog tartani, mint az eredeti.

2.1.3. Konvergens sorozatok tulajdonságai

2.2. Állítás. *Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos.*

Bizonyítás* Legyen (a_n) konvergens, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A.$$

Ekkor $\varepsilon = 1$ -hez is $\exists N$, hogy ha $n \geq N$ akkor $|a_n - A| < 1$, azaz $a_n \in (A - 1, A + 1)$. Legyen

$$m = \min\{a_n : n < N\}, \quad M = \max\{a_n : n < N\}.$$

Más szóval, legyen m az a_N előtti elemek közül a legkisebb, és a legnagyobb M . Legyenek továbbá

$$k = \min\{m, A - 1\}, \quad K = \max\{M, A + 1\}.$$

Ekkor

$$k \leq a_n \leq K, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Megjegyzés. Az állítás fordítva nem igaz: ha egy sorozat korlátos, akkor még nem feltétlenül konvergens. Például $a_n = (-1)^n$.

2.3. Állítás. *1. Ha (a_n) monoton növekvő sorozat, és felülről korlátos, akkor konvergens.*

2. Ha (a_n) monoton fogyó és alulról korlátos, akkor konvergens.

Bizonyítás* Az állítás két része ekvivalens. Belátjuk az 1. részt.

Tekintsük a következő halmazt:

$$H = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Ekkor H felülről korlátos, és létezik $\sup(H) =: A$. Ez azt jelenti, hogy $\forall \varepsilon > 0$ -ra $A - \varepsilon$ nem felső korlát. Emiatt van H -ban ennél nagyobb elem. Jelölje ezt például a_N , ekkor $a_N > A - \varepsilon$. A monotonitás miatt az is teljesül, hogy $\forall n > N$ esetén $a_n \geq a_N$, azaz $a_n > A - \varepsilon$. Mivel $a_n \leq A$ minden n -re (hiszen A felső korlát), így

$$A - \varepsilon < a_n \leq A < A + \varepsilon \quad \text{ha} \quad n \geq N.$$

Példa. Gyakorlatokon beláttuk azt a két összefüggést, hogy

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

és hogy

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ez azt jelenti, hogy az alábbi sorozat:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

monoton növekvő és felülről korlátos. Ezért $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergens.

2.5. Definíció. Az e számot - ez az **Euler-féle szám** - úgy definiáljuk, mint a fenti sorozat határértéke:

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

($e \approx 2,718281\dots$, egy irracionális szám.)

2.4. Állítás. *Tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a.$$

Példa.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

2.1.4. A határérték alaptulajdonságai

2.5. Állítás. *Legyen adott két konvergens sorozat (a_n) és (b_n) , melyekre*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B.$$

Ekkor

1. $\forall c \in \mathbb{R}$ esetén (ca_n) is konvergens, és $\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = cA$.
2. $(a_n + b_n)$ is konvergens, és $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B$.
3. (a_nb_n) is konvergens, és $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_nb_n) = AB$.

Bizonyítás*

1. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Be kell látnunk, hogy

$$|ca_n - cA| < \varepsilon$$

teljesül bizonyos N indextől kezdve.

$c = 0$ esetén az állítás triviális.

Ha $c \neq 0$, akkor az (a_n) sorozatot tekintve $\frac{\varepsilon}{|c|}$ -hez $\exists N$ küszöbindex, melyre

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{|c|} \quad \forall n \geq N.$$

Így ha $n \geq N$, akkor

$$|ca_n - cA| = |c| |a_n - A| < |c| \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$

2. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén $\varepsilon/2$ -hez $\exists N_1$, hogy ha $n \geq N_1$, akkor

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Hasonlóan $\exists N_2$, hogy ha $n \geq N_2$, akkor

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Így $N = \max(N_1, N_2)$ választással $n \geq N$ esetén

$$|a_n + b_n - (A + B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

3. *Gyakorlat.* Igazolja a 3. tulajdonságot.

Folytatjuk az alaptulajdonságok felsorolását:

2.6. Állítás. *Adott két konvergens sorozat (a_n) és (b_n) , melyekre*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B.$$

Ekkor

$$4. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |A|.$$

$$5. \quad \text{Tegyük fel, hogy } A \neq 0 \text{ és } a_n \neq 0. \text{ Ekkor } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{A}.$$

5*. Az előző feltételekkel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{B}{A}.$$

Bizonyítás*

4. $\left| |a_n| - |A| \right| \leq |a_n - A|$ alapján triviális.
5. Feltesszük, hogy $A > 0$ és $a_n > 0$. Az állítás igazolásához felhasználjuk, hogy

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{A} \right| = \frac{|a_n - A|}{|a_n \cdot A|} \leq \dots$$

A folytatást az olvasóra ízzuk.

Példa. Az (a_n) sorozatot rekurzívan definiáljuk a következőképp. Legyen

$$\begin{aligned} a_1 &:= 1 \\ a_{n+1} &:= \frac{a_n^2 + 4}{4}, \quad n \geq 1 \end{aligned} \tag{2.1}$$

A sorozat minden tagja pozitív. Konvergens-e?

Először belátjuk, hogy a sorozat *monoton növő*, azaz $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Valóban, teljes indukcióval:

1. $n = 1$ esetén $a_1 = 1$ és $a_2 = \frac{5}{4}$, ezért $a_1 < a_2$.
2. Tegyük fel, már beláttuk, hogy $a_n \geq a_{n-1}$. Ekkor

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 4}{4} \geq \frac{a_{n-1}^2 + 4}{4} = a_n,$$

a középen levő egyenlőtlenség az indukciós feltétel miatt igaz.

Belátjuk azt is, hogy a sorozat *korlátos*: igazoljuk, hogy $a_n < 2$ teljesül $\forall n$ -re. Ezt is teljes indukcióval bizonyítjuk.

1. $n = 1$ esetén $a_1 = 1 < 2$, így az állítás igaz.
2. Tegyük fel hogy $a_n < 2$. Felhasználjuk az indukciós feltételt:

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 4}{4} < \frac{4 + 4}{4} = 2.$$

A sorozat monoton növény és felülről korlátos, ezért konvergens. Legyen

$$A := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Az eredeti (2.1) egyenletben határértéket véve azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 + 4}{4} = \frac{A^2 + 4}{4},$$

ezért

$$A = \frac{A^2 + 4}{4}.$$

A fenti egyenlet egyetlen megoldása $A = 2$, ez a sorozat határértéke.

2.1.5. Részsorozatok

Adott az (a_n) sorozat. Egy **index-sorozat**ot úgy definiálunk, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ természetes számhoz hozzárendelünk egy n_k -val jelölt indexet, melyekre

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1}, \dots$$

teljesül. A *részsorozat* elemei $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots$ lesznek.

Pl. (a_{2n}) a páros indexű tagokból álló részsorozat: $a_2, a_4, a_6, \dots$

2.1. Tétel. *Minden sorozatnak van monoton részsorozata.*

Bizonyítás* A sorozat egy a_n elemét **csúcsnak** nevezzük, ha

$$a_n \geq a_m \quad \forall m > n,$$

azaz nincs nála nagyobb az utána következő elemek közt. Két eset lehet.

1. *eset.* Ha végtelen sok csúcs van, melyek indexei $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, akkor az (a_{n_k}) részsorozat monoton fogyó.

2. *eset.* Ha csak véges sok csúcs van, akkor legyen az utolsó csúcs indexe n , ha egyáltalán nincs csúcs, akkor $n = 0$. Definiáljuk n_1 -t, mint $n_1 := n + 1$. Ekkor, mivel a_{n_1} már nem csúcs, ezért van nála nagyobb elem, legyen ez $a_{n_2} > a_{n_1}$, ahol $n_2 > n_1$. Hasonlóan, mivel a_{n_2} nem csúcs, ezért van ennél nagyobb a_{n_3} , melyre $n_3 > n_2$ és $a_{n_3} > a_{n_2}$. Így tudunk monoton növä részsorozatot konstruálni.

Egy alapvető fontosságú tétel a **Bolzano-Weierstrass tétel**, ami a konvergencia és korlátosság összefüggésének másik irányáról szól.

2.2. Tétel. *Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy (a_n) korlátos sorozatot. A 2.1 Tétel szerint van (a_{n_k}) monoton részsorozata, amely szintén korlátos. Ezért ez a részsorozat konvergens is.

2.7. Állítás. *Az (a_n) sorozat **nullsorozat**, ha határértéke 0.*

1. (a_n) konvergens és határértéke A azzal ekvivalens, hogy $(b_n) = (a_n - A)$ nullsorozat.
2. Ha (a_n) nullsorozat és (b_n) korlátos, akkor $(a_n b_n)$ is nullsorozat, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0.$$

3. Tegyük fel, hogy (a_n) divergens és $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \infty$. Legyen

$$b_n := \begin{cases} \frac{1}{a_n}, & \text{ha } a_n \neq 0 \\ 0, & \text{ha } a_n = 0 \end{cases}$$

Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, azaz (b_n) nullsorozat.

4. (a_n) pontosan akkor nullsorozat ha $(|a_n|)$ nullsorozat.
5. Legyen (a_n) divergens sorozat, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Legyen (b_n) olyan alulról korlátos sorozat, melynek alsó korlátja pozitív. Ekkor:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty.$$

Bizonyítás*

2. Ha (b_n) korlátos, akkor $|b_n| \leq K$, minden n -re. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén a ε/K -hoz létezik N :

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{K} \quad \forall n \geq N.$$

Ekkor

$$|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq \frac{\varepsilon}{K} K = \varepsilon.$$

3. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $|a_n| \rightarrow +\infty$, ezért $K = 1/\varepsilon$ -hoz $\exists N = N(K)$ küszöbindex, hogy $\forall n \geq N$ -re $|a_n| \geq K (> 0)$. Ekkor

$$|b_n| = \frac{1}{|a_n|} \leq \frac{1}{K} = \varepsilon$$

5. Legyen (b_n) egy pozitív alsó korlátja k :

$$|b_n| = b_n \geq k > 0$$

Legyen $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges pozitív szám. Ekkor K/k -hoz $\exists N$ küszöbindex, melyre ha $n \geq N$, akkor $a_n \geq K/k$. Ekkor:

$$a_n b_n \geq \frac{K}{k} k = K$$

2.1.6. Cauchy sorozatok

2.6. Definíció. Az (a_n) sorozat eleget tesz a **Cauchy feltételnek**, ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists N$ küszöbindex, $N = N(\varepsilon)$, melyre teljesül, hogy

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N.$$

Ha egy sorozat kielégíti a Cauchy feltételt, akkor ez **Cauchy sorozat**.

2.3. Tétel. Egy (a_n) sorozat pontosan akkor konvergens, ha Cauchy sorozat.

Bizonyítás. Az egyik irányt igazoljuk. Tegyük fel, hogy (a_n) konvergens:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A.$$

$\forall \varepsilon > 0$ mellett az $\varepsilon/2$ számhoz $\exists N$ küszöbindex, melyre $\forall n, m \geq N$ esetén

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ekkor a háromszög egyenlőtlenség miatt

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |(a_n - A) + (A - a_m)| \leq \\ &\leq |a_n - A| + |a_m - A| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Példa. Legyen

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Becsüljük meg az n -dik és $2n$ -dik tag különbségét:

$$\begin{aligned} a_{2n} - a_n &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \\ &> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$a_{2n} - a_n > \frac{1}{2} \quad \forall n.$$

Ezért $\varepsilon = \frac{1}{2}$ esetén nem teljesül a Cauchy kritérium, (a_n) nem konvergens.

2.1.7. Konvergenciák összehasonlítása

2.8. Állítás. *(Konvergencia monotonitása) Tegyük fel, hogy az (a_n) és (b_n) sorozatok konvergensek, jelölje*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B.$$

Ha $\exists N_0$, hogy $a_n < b_n$ teljesül $\forall n \geq N_0$, akkor $A \leq B$.

Bizonyítás. Triviális.

Megjegyzés. Bár a feltételben szigorú egyenlőtlenség áll, a határértékben egyenlőség is előfordulhat. Példaként nézzük ezeket a sorozatokat:

$$a_n = \frac{1}{n^2} < b_n = \frac{1}{n}.$$

Nyilván

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 2,$$

azaz $a_n < b_n$ minden $n > 1$ esetén. Mégis határértékben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

2.4. Tétel. *(Rendőr-elv) Tegyük fel, hogy az (x_n) és (y_n) sorozatok egy N_0 indextől kezdve közrefognak egy harmadik sorozatot:*

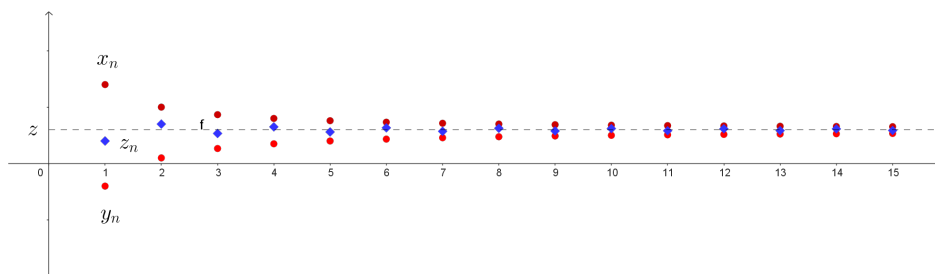
$$x_n \leq z_n \leq y_n \quad \forall n \geq N_0.$$

Tegyük fel azt is, hogy (x_n) és (y_n) konvergens sorozatok a határérték:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = z.$$

Ekkor (z_n) is konvergens, és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z.$$



Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor $\exists N_1$ és $\exists N_2$, melyekre

$$|x_n - z| < \varepsilon \quad \text{ha } n \geq N_1, \quad |y_n - z| < \varepsilon \quad \text{ha } n \geq N_2$$

Ekkor $n \geq \max(N_0, N_1, N_2)$ esetén

$$z - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < z + \varepsilon,$$

amiből a konvergencia következik.

Példa. Legyen $a_n = \sqrt[n]{n}$. Belátjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$. Azt tudjuk, hogy $1 < a_n$, minden $n > 1$ -re. Ekkor

$$\begin{aligned} 1 < a_n &= \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \dots 1} \leq \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n} + 1 \dots + 1}{n} = \\ &= \frac{2\sqrt{n}}{n} + \frac{n-2}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{n-2}{n} < \frac{2}{\sqrt{n}} + 1. \end{aligned}$$

Az első sorban a számtani és mértani közép közti egyenlőséget használtuk. Azt kaptuk, hogy

$$1 < a_n < \frac{2}{\sqrt{n}} + 1.$$

Legyen: $b_n \equiv 1$ (minden eleme 1) és $c_n = 2/\sqrt{n} + 1$. Mindkét sorozat határértéke 1, és $b_n < a_n < c_n$ minden n -re. Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$, ezért $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$. Hasonlóan belátható: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$.

Példa. (Az előző példa következménye.) Legyen $p > 0$ tetszőleges, $a_n := \sqrt[n]{p}$, láttuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p} = 1$, most másképp is belátjuk. Tetszőleges $p > 0$ esetén

igaz, az $1/n < p < n$ bizonyos N után (azaz $\exists N$ index, hogy $1/n < p < n$, minden $n \geq N$ esetén). Ekkor:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} < \sqrt[n]{p} < \sqrt[n]{n},$$

és emiatt

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{p} \leq 1.$$

2.9. Állítás. (Összehasonlító kritériumok)

1. (Majoráns kritérium) Tegyük fel, hogy (a_n) nullsorozat, és (b_n) olyan sorozat, melyre $|b_n| \leq |a_n|$ minden n -re (vagy rögzített N mellett minden $n \geq N$ -re). Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

2. (Minoráns kritérium) Tegyük fel, hogy $(a_n) +\infty$ -be divergál, azaz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

Tegyük fel azt is, hogy van olyan N index, melyre $b_n \geq a_n$, ha $n \geq N$.

Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$.

Figyekelem! A $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = "+\infty \cdot 0"$ típusú határérték **bármilyen** lehet.

4. *Gyakorlat.* Vajon lehet-e $-\infty$ is egy felnti típusú határérték?

()

Emlékeztetünk arra, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } |p| < 1 \\ 1, & \text{ha } p = 1 \\ \infty, & \text{ha } p > 1 \\ \text{divergens,} & \text{ha } p \leq -1 \end{cases}$$

1. *Példa.* Legyen $a_n = np^n$. Belátjuk, hogy ha $0 < p < 1$, akkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} np^n = 0.$$

Átírjuk a sorozat elemeit ilyen alakba:

$$a_n = np^n = (\sqrt[n]{np})^n.$$

Mivel $\sqrt[n]{n}$ tart az 1-hez és $1/p > 1$, ezért $\exists N$ küszöbindex, hogy ha $n \geq N$, akkor $\sqrt[n]{n} < 1/p$. Ezekre az n -ekre

$$|\sqrt[n]{np}| < \frac{1}{p} = 1, \quad \forall n \geq N.$$

Tehát létezik $0 < q < 1$, melyre

$$\sqrt[n]{np} < q < 1.$$

Ezért $0 < a_n < q^n$, ha $n \geq N$, így a rendőrelv alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

1.⁺ *Példa.* Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges rögzített természetes szám, és tekintsük az alábbi sorozatot valamely $0 < p < 1$ paraméterrel:

$$a_n = n^k p^n.$$

Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Bizonyítás* Az előző esethez hasonlóan $a_n = (\sqrt[n]{n^k p})^n$. Mivel $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$, ezért $\sqrt[n]{n^k} \rightarrow 1$, és emiatt $\sqrt[n]{n^k} < 1/p$, ha $n > N$. A bizonyítás ugyanúgy megy, mint a $k = 1$ esetben.

2. *Példa.* Legyen $a_n = \frac{3^n}{n!}$. Belátjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Legyen $n > 3$. Ekkor

$$a_n = \frac{3^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} = \left(\frac{3}{1} \frac{3}{2} \frac{3}{3}\right) \frac{3}{4} \dots \frac{3}{n} \leq \frac{9}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-3} \rightarrow 0.$$

2.⁺ *Példa.* Legyen $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor az

$$a_n = \frac{a^n}{n!},$$

sorozatra $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ most is igaz.

2.1.8. Számtani átlag-sorozatok*

(Kiegészítő tananyag)

Tetszőleges (a_n) sorozatból konstruálhatunk egy *számtani átlag sorozatot* a következőképpen:

$$A_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n},$$

tehát az új sorozat n -dik eleme az eredeti sorozat első n elemének számtani átlaga. Ennek konvergenciáját vizsgáljuk ebben a fejezetben.

Elsőként nézzük meg mit állíthatunk, ha a kiinduló sorozat nullsorozat.

2.10. Állítás. *Adott (a_n) nullsorozat. Legyen*

$$A_n = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$.

Bizonyítás. Az (a_n) nullsorozat korlátos, $|a_n| \leq K$ felső korlát. A háromszög egyenlőtlenség miatt:

$$|A_n| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k|.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. $\varepsilon/2$ -höz létezik N küszöbindex, hogy ha $n \geq N$, akkor $|a_n| < \varepsilon/2$. Ezekre az n indexekre

$$|A_n| \leq \frac{|a_1| + \dots + |a_N| + |a_{N+1}| + \dots + |a_n|}{n} \leq$$

$$\leq \frac{N}{n}K + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{n-N}{n} < \frac{N}{n}K + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Szeretnénk elegendően nagy n -et választani, melyre az is teljesül, hogy

$$\frac{N}{n}K \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kis átalakítással azt kapjuk, hogy ez valóban így lesz, ha

$$n \geq \frac{2NK}{\varepsilon} = N_1.$$

Azt kaptuk tehát, hogy ha $n \geq \max(N, N_1)$, akkor

$$|A_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ezzel az állítást beláttuk.

Megjegyzés. Az állítás megfordítása nem igaz!

$$A_n \rightarrow 0 \not\Rightarrow a_n \rightarrow 0.$$

Ellenpélda: Ha $a_n = (-1)^n$, akkor

$$A_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } n = 2k \\ -\frac{1}{n}, & \text{ha } n = 2k+1 \end{cases},$$

tehát $A_n \rightarrow 0$, bár az eredeti sorozat divergens volt.

2.1. Következmény. *Legyen (a_n) konvergens sorozat, melynek határértéke A . Ekkor a számtani átlag sorozat is konvergens, és határértéke ugyanaz:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A.$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ azzal ekvivalens, hogy $(a_n - A)$ nullsorozat. Legyen most $b_n := a_n - A$. Ennek a sorozatnak a számtani átlag sorozata

$$B_n = \frac{b_1 + \dots + b_n}{n} = \frac{a_1 - A + \dots + a_n - A}{n} = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} - A = A_n - A.$$

Az előző tétel alapján

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = 0,$$

ahonnan azonnal következik, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A.$$

2.11. Állítás. *Legyen (a_n) pozitív tagú sorozat, ennek mértani átlag sorozata:*

$$G_n := \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}$$

Tegyük fel, hogy (a_n) nullsorozat, ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_n = 0.$$

Bizonyítás. A számtani-mértani közép közti egyenlőtlenség miatt

$$0 < G_n \leq A_n,$$

és mivel (A_n) nullsorozat, ezért (G_n) is az.

2.1.9. Torlódási pont

2.7. Definíció. *A $t \in \mathbb{R}$ szám **torlódási pontja** (a_n) sorozatnak, ha t bármely környezetében végtelen sok tagja van a sorozatnak.*

Más szavakkal a t torlódási pont, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén a $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ intervallumban a sorozatnak végtelen sok tagja van. Lényeges különbség a határértékhez képest, hogy a határérték tetszőleges környezetén **kívül** csak véges sok tagja lehet a sorozatnak.

Példa. Tekintsük az $a_n = (-1)^n$ sorozatot. Ennek két torlódási pontja van, $t_1 = 1$ és $t_2 = -1$.

Példa. "Összefésült sorozatok". Legyen

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{n}{n+1}.$$

Definiáljunk egy harmadik sorozatot a következőképpen:

$$c_n = \begin{cases} a_n & \text{ha } n = 2k \\ b_n & \text{ha } n = 2k + 1 \end{cases}$$

A (c_n) sorozatnak két torlódási pontja van, 0 és 1. Ez a sorozat nem konvergens.

2.12. Állítás. *Ha az (a_n) sorozat konvergens, akkor egyetlen torlódási pontja van, ami egyben a határértéke is.*

Megjegyzés. A fenti állítás megfordítása nem igaz. Az a sorozat, aminek egyetlen torlódási pontja van, nem feltétlenül konvergens. Példa erre a következő sorozat

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{ha } n = 2k + 1 \\ (-1)^{n/2} n & \text{ha } n = 2k \end{cases}.$$

A sorozat elemei tehát

$$1, -2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, -6, \dots$$

A sorozatnak egyetlen torlódási pontja van, a 0, de nyilván nem konvergens, hiszen nem korlátos.

Definíció* *Ha a torlódási pontok halmaza felülről korlátos, akkor ezek a legkisebb felső korlátját **limes superior**nak nevezzük. (A torlódási pontok supremuma.) Jelölése:*

$$\limsup(a_n) = \overline{\lim}(a_n).$$

Ha a torlódási pontok halmaza alulról korlátos, akkor ezek a legnagyobb alsó korlátját **limes inferior**nak nevezzük, ennek jelölése:

$$\liminf(a_n) = \underline{\lim}(a_n).$$

Példa. Jogos kérdés, vajon van-e olyan számsorozat, aminek végtelen sok torlódási pontja van? Egy "egyszerű" példát mutatunk:

$$1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \dots$$

Ennek a sorozatnak **minden** $n \in \mathbb{N}$ torlódási pontja lesz.

2.2. Végtelen sorok

Emlékeztetünk rá, hogy *sorozat* valós számok rendezett halmaza. *Sor* alatt valós számok **összegét** értjük, ahol az összeadandók száma végtelen:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \dots$$

Formálisan, **végtelen sor** alatt egy végtelen összeget értünk, ami ilyen alakú:

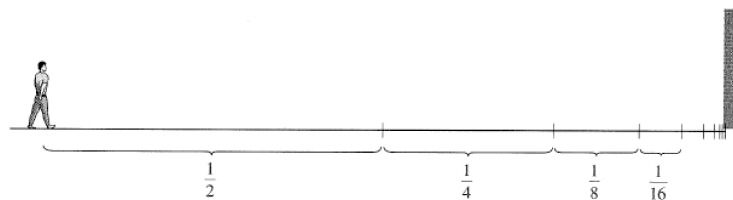
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Kérdés, hogy milyen értelmet tulajdoníthatunk egy ilyen végtelen összegnek.

ZENO paradoxon. (Az ókori görög gondolkodók hagyták ránk ezt az érdekes paradoxont.) A sétáló ember az ajtótól szeretne eljutni a falig.

A sétáló elmegy e táv feléig. Ezután a maradék táv feléig, és így tovább. Végtelen sok lépés, és soha nem ér oda... Valóban?

Persze TUDJUK, hogy eléri a falat - ha akarja. A paradoxon feloldása az a tény, hogy végtelen sok szám összege lehet véges.



2.2. ábra. A Zeno paradoxon.

2.2.1. Végtelen sor konvergenciája

2.8. Definíció. A végtelen sor jelölése: $(\sum a_n)$. A *végtelen sor konvergens*, ha a részletösszegek sorozata

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad n \in \mathbb{N}$$

konvergens. Ekkor azt mondjuk, hogy *a sor összege*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Példa. Legyen $a_n = \frac{1}{2^n}$, ekkor a végtelen sor

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

Teljes indukcióval belátható (HF), hogy

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Tehát (s_n) konvergens és 1-hez tart, ezért

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Példa. Legyen $a_n = (-1)^n$, ekkor a végtelen sor

$$-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

A részletösszegek sorozata:

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{ha } n = 2k, \\ -1 & \text{ha } n = 2k + 1. \end{cases}$$

Mivel az (s_n) sorozat nem konvergens, a végtelen sor összege nem létezik.

2.9. Definíció. *Ha a részletösszegek (s_n) sorozata nem konvergens, akkor azt mondjuk, hogy a végtelen sor **divergens**.*

Példa. Legyen $a_n = q^{n-1}$. A $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ végtelen sor elnevezése **mértani sor**.

Kérdés, mikor konvergens a sor, és mennyi az alábbi összeg:

$$1 + q + q^2 + \dots = ?$$

Az első n tag összege

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad \text{ha } q \neq 1.$$

Így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \begin{cases} \frac{1}{1 - q} & \text{ha } |q| < 1, \\ +\infty & \text{ha } q \geq 1, \\ \nexists & \text{ha } q \leq -1. \end{cases}$$

2.13. Állítás. *Ha $(\sum a_n)$ konvergens, akkor (a_n) nullsorozat.*

Bizonyítás. Tekintsük az alábbi részletösszegeket $n \geq 2$ esetén:

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k.$$

Tudjuk, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - S_n) = 0.$$

A fenti állítás másik oldalról megfogalmazva a *Divergencia teszt*:

Divergencia teszt. Ha (a_n) nem nullsorozat, akkor $(\sum a_n)$ divergens.

Megjegyzés. Az állítás megfordítása nem igaz. Ha (a_n) nullsorozat, akkor $(\sum a_n)$ lehet divergens is.

Példa. Tekintsük $a_n = \frac{1}{n}$ választással a $(\sum \frac{1}{n})$ végtelen sort. A sor összeadandói 0-hoz tartanak. A részletösszegek sorozata

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Erről már beláttuk, hogy nem konvergens, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$.

Példa.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = ?$$

Elemi törtekre bontva az összeadandókat

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 1.$$

A sorozatoknál tanultakból következik, hogy a végtelen sor pontosan akkor konvergens ha (s_n) teljesíti a Cauchy feltételt.

Cauchy feltétel sorokra. *A $(\sum a_n)$ végtelen sor teljesíti a Cauchy feltételt, ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists N = N(\varepsilon)$ küszöbindex, melyre $\forall n > m \geq N$ esetén*

$$|a_{m+1} + \dots + a_n| = \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy a N küszöbindex után bármennyi elemet adunk össze, az összeg kisebb lesz, mint ε .

2.2.2. Összehasonlító kritériumok

Az alábbi két tétel azonnal következik a sorozatokra igazolt összehasonlító kritériumokból.

2.5. Tétel. 1. *(Majoráns kritérium) Tegyük fel, hogy adott két sor, melyre $\exists N \in \mathbb{N}$:*

$$0 \leq b_n \leq a_n \quad \forall n \geq N$$

Ha $(\sum a_n)$ sor konvergens, akkor $(\sum b_n)$ is konvergens.

2. *(Minoráns kritérium) Tegyük fel, hogy $\exists N \in \mathbb{N}$:*

$$b_n \geq a_n \quad \forall n \geq N$$

Ha $(\sum a_n)$ divergens és

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty,$$

akkor $(\sum b_n)$ is divergens, és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$.

Példa. Konvergens-e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$?

Felhasználjuk azt a becslést, hogy

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}, \quad \forall n \geq 2.$$

Ekkor alkalmazhatjuk a majoráns kritériumot, hiszen a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

sor konvergens. Tehát beláttuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Megjegyzés. Láttuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

A későbbiek során igazolni fogjuk, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

sor akkor konvergens, ha $\alpha > 1$.

Példa. Végtelen tizedestörtek értelmezése. Egy végtelen tizedestört a $(0, 1)$ intervallumban így írható:

$$0, a_1 a_2 a_3 \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 10^{-k}, \quad 0 \leq a_k \leq 9.$$

A fenti sort majorálni tudjuk, a

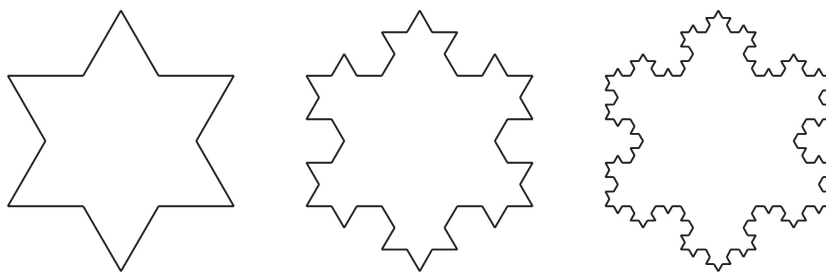
$$9 \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} < \infty$$

mértani sorral, tehát konvergens.

Példa. Képezzünk sokszöget egy szabályos, a oldalú, T területű háromszögből a következő rekurzív eljárással:

1. Osszuk minden oldalt 3 egyenlő részre.
2. Minden középső oldal szakaszra illesszünk szabályos háromszöget.
3. Ismételjük meg az előző lépéseket.

Az így kapott végtelen oldalú sokszög az úgynevezett Koch-görbe. Mennyi az így kapott alakzat kerülete és területe?



2.3. ábra. A Koch görbe konstrukciójának 2. 3. és 4. lépése.

Megoldás:

1. A Koch-görbe kerületét egy sorozat határértékeként kapjuk. Minden lépésben minden oldal hossza $\frac{4}{3}$ -szorosára nő, mivel minden oldal középső harmadát nála kétszer hosszabbra cseréltük. A kerület tehát:

$$K_{\infty} = 3a \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3} \right)^n = \infty$$

2. A Koch-görbe területe geometriai sor határértékeként áll elő. Az egyes lépésekben újonnan illesztett háromszögek *száma* az oldalszámmal egyenlő (azaz lépésenként 4-szeresére nő), melyek *területe* az előző háromszögek területének $\frac{1}{9}$ -szerese. E két tényező figyelembevételével a terület

határértékére felírható geometriai sor:

$$\begin{aligned} T_\infty &= T + 3\frac{T}{9} + 3\frac{T}{9^2}4 + 3\frac{T}{9^3}16 + \dots = \\ &= T + 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T}{9} \sum_{k=0}^n \left(\frac{4}{9}\right)^k = T + \frac{T}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = T + \frac{3T}{5} = \frac{8T}{5}. \end{aligned}$$

Megjegyzés. Érdekes belegondolni abba a ténybe, hogy a kapott alakzat *véges* területét önmaga kicsinyített másaiból előálló *végtelen* hosszú görbe határolja. A Koch-görbe tipikus példája az önhasznó fraktáloknak.

2.2.3. Abszolút konvergens sorok

2.10. Definíció. A $(\sum a_n)$ *végtelen sor* **abszolút konvergens**, ha az abszolútértékekből álló $(\sum |a_n|)$ sor konvergens.

2.14. Állítás. Ha $(\sum a_n)$ abszolút konvergens, akkor konvergens is.

Bizonyítás. Belátjuk a Cauchy kritérium teljesülését. A háromszög egyenlőtlenség miatt

$$\left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k|,$$

és a jobboldal tetszőlegesen kicsi lehet elegendően nagy $m < n$ esetén az abszolút konvergenca miatt.

Az állítás megfordítása nem igaz, látunk majd rá ellenpéldát.

2.11. Definíció. A $(\sum a_n)$ *végtelen sor* **feltételesen konvergens**, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.

2.2.4. Hányados-kritérium

2.6. Tétel. (*D'Alembert féle hányadoskritérium*)

1. Tegyük fel, hogy $\exists q \in (0, 1)$, melyre

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1$$

teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ -re. Akkor a sor abszolút konvergens.

2. Tegyük fel, hogy

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1, \quad \forall n.$$

Akkor a sor divergens.

Bizonyítás.

1. A feltétel szerint

$$\left| \frac{a_2}{a_1} \right| \leq q, \quad \left| \frac{a_3}{a_2} \right| \leq q, \quad \dots \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q.$$

Ezeket összeszorozva azt kapjuk, hogy

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_1} \right| \leq q^n,$$

azaz $|a_{n+1}| \leq |a_1| \cdot q^n$. Így a majoráns kritérium szerint az abszolútértékekből álló sor konvergens.

2. Ha

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1,$$

akkor $|a_{n+1}| \geq |a_n|$, tehát (a_n) nem lehet nullsorozat. (Például $\varepsilon = |a_1|$ -hez már nincs olyan N küszöbindex, hogy $|a_n| < \varepsilon$ teljesülne $n \geq N$ mellett.)

Megjegyzés. Elegendő a fenti tételben, hogy a feltételek fix $N \in \mathbb{N}$ mellett minden $n \geq N$ esetén teljesülnek.

Megjegyzés. A tétel első részéhez fontos a $q < 1$ szám létezése, nem lenne elegendő azt mondani, hogy

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1.$$

Mutatunk rá ellenpéldát.

Példa. Legyen $a_n = 1/n$. Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

és itt az egymást követő elemek hányadosára mindig teljesül, hogy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1,$$

de nem tudunk közös $q < 1$ felső korlátot mondani. A sor nem is konvergens, mint már láttuk.

2.7. Tétel. *(Hányados-kritérium gyengített változata.) Tegyük fel, hogy létezik az alábbi határérték:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = A.$$

Ekkor

1. ha $A < 1$, akkor a sor abszolút konvergens,
2. ha $A > 1$, akkor a sor divergens,
3. ha $A = 1$, akkor a sor lehet konvergens és divergens is.

Bizonyítás* Visszavezetjük az előző tételre.

1. Tegyük fel, hogy $A < 1$. Ekkor az $\varepsilon = \frac{1-A}{2}$ -hoz is $\exists N$ index, melyre minden $n > N$ esetén:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - A \right| < \varepsilon,$$

azaz

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < A + \varepsilon = \frac{A+1}{2} < 1.$$

2. Tegyük fel, hogy $A > 1$. Ekkor $\exists N$,

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1,$$

minden $n \geq N$ esetén.

3. Tegyük fel, hogy $A = 1$. Mindkét lehetséges esetre mutatunk példát. Legyen $a_n = 1/n$, ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$

és

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty.$$

Legyen $a_n = 1/n^2$, ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,$$

és

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

Példa. Legyen

$$a_n = \frac{1}{n!}.$$

Ekkor a végtelen sor

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

A hányados kritérium szerint

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{\frac{(n+1)!}{\frac{1}{n!}}} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2} < 1,$$

így a sor konvergens.

2.2.5. Gyökkritérium

A korábbi fejezetben szereplő hányadoskritérium helyett használhatjuk az ú.n. *gyökkritériumot*. Az alábbi tételek bizonyítása teljesen hasonló a hányadoskritériumra vonatkozó megfelelő tételek bizonyításához, így nagyrészt elhagyjuk.

2.8. Tétel. *(Cauchy féle gyökkritérium) Adott az (a_n) sorozat.*

1. *Tegyük fel, hogy létezik olyan $0 < q < 1$ szám, melyre*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$$

teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ -re. Ekkor a $(\sum a_n)$ sor abszolút konvergens.

2. *Tegyük fel, hogy $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, minden $n \in \mathbb{N}$ -re. Ekkor a $(\sum a_n)$ sor divergens.*

Bizonyítás.

1. A feltétel szerint $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$, ahol $0 < q < 1$, így igaz az is, hogy

$$|a_n| \leq q^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Mivel

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n < \infty$$

ezért a majoráns kritérium alkalmazásával ebből következik, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

2. Mivel $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, így emiatt $|a_n| \geq 1$, azaz (a_n) nem nullsorozat, tehát a $\left(\sum a_n\right)$ sor nem lehet konvergens.

2.9. Tétel. *(Gyengített gyökkritérium) Adott a $(\sum a_n)$ sor. Tegyük fel, hogy létezik az alábbi határérték:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = A.$$

Ekkor

1. Ha $A < 1$, akkor a $(\sum a_n)$ sor abszolút konvergens,
2. Ha $A > 1$, akkor a $(\sum a_n)$ sor divergens,
3. Ha $A = 1$, akkor a kritérium alapján nem dönthető el a sor konvergenciája.

2.2.6. Leibniz sorok

2.12. Definíció. $(\sum a_n)$ **Leibniz sor**, ha az (a_n) sorozat rendelkezik az alábbi három tulajdonsággal.

1. Váltakozó előjelű, azaz $a_n a_{n+1} < 0$,
2. $(|a_n|)$ monoton fogyó,
3. (a_n) nullsorozat.

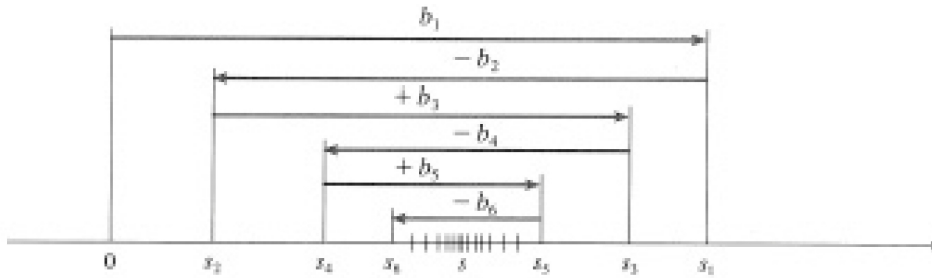
Alternatív definíció. Adott egy (b_n) pozitív tagú számsorozat, mely monoton fogyó nullsorozat. Ekkor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$$

alakú sorok **Leibniz típusúak**.

2.10. Tétel. Minden Leibniz sor konvergens.

Bizonyítás.



2.4. ábra. A Leibniz sor konvergencia bizonyításának alapötlete.

Feltehető, hogy az első tagra $a_1 > 0$. Ekkor a páratlan indexű tagokra $a_{2n+1} > 0$, a páros indexű tagokra $a_{2n} < 0$ teljesül. Képezzük az alábbi sorozatokat:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 := a_1 + a_2 \\ \beta_1 := a_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_1 \leq \beta_1$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_2 := a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ \beta_2 := a_1 + a_2 + a_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_2 \leq \beta_2$$

$\vdots$

Az (a_n) sorozat abszolútértékének monotonitása miatt

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots \quad \beta_1 > \beta_2 > \dots$$

A Cantor féle közöspont tételt fogjuk alkalmazni az $I_1 = [\alpha_1, \beta_1]$, $I_2 = [\alpha_2, \beta_2]$, ... intervallum sorozatra. Könnyen látható, hogy

- $I_{n+1} \subset I_n$, egymásba skatulyázott zárt intervallumok,
- az intervallumok hossza: $|I_1| = |a_2|$, $|I_2| = |a_4|$..., ezért

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |I_n| = 0.$$

Mivel a Cantor tétel feltételei teljesülnek, ezért létezik egyetlen közös pont, s , melyre

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n,$$

ami egyben a kiinduló sor összege is lesz.

Példa. Tekintsük az alábbi végtelen sort:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Látható, hogy ez Leibniz-típusú, ezért konvergens. Létezik a részletösszegek határértéke:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} < \infty.$$

De tagok abszolút értékeinek összege már nem véges! Hiszen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

ahogy korábban már beláttuk. Tehát ez a sor feltételesen konvergens.

2.15. Állítás. (Összeadás sorrendje és a sor összege)

1. Abszolút konvergens sor esetén a sor összege független az összeadandók sorrendjétől.

2. (Riemann-féle átrendezési tétel.) *Feltételesen konvergens sor esetén a sor átrendezésével az összeg **bárm**i lehet.*

A fenti Állítást itt nem bizonyítjuk.

Megjegyzés: Mivel a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

sor feltételesen konvergens, így az összeg függ az összeadás sorrendjétől.

3. fejezet

Valós függvények

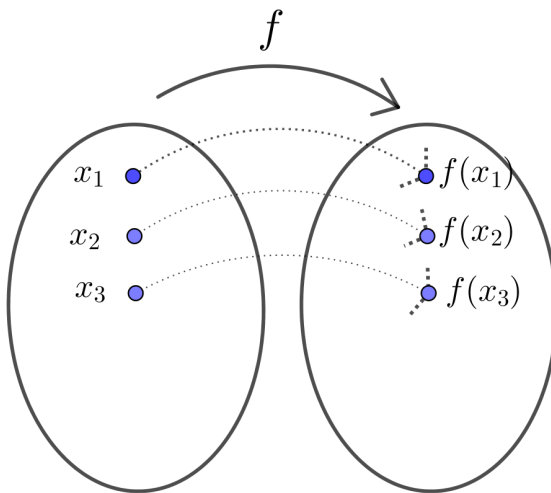
3.1. Bevezetés

3.1.1. Alaptulajdonságok

Adott két halmaz X és Y , valamint egy $f : X \longrightarrow Y$ leképezés. Ez azt jelenti, hogy $\forall x \in X$ elemhez hozzárendelünk az Y halmazból egyetlen y elemet, és ezt így jelöljük:

$$y = f(x).$$

Szokásos még az $x \mapsto y$ jelölés is.



3.1. ábra. Függvény, egy hozzárendelés.

A függvény **értelmezési tartományát** D_f jelöli (ha külön hangsúlyozzuk, melyik függvényről van szó). A függvény **értékkészlete** mindazon $y \in Y$ elemek halmaza, melyek előállnak képként, azaz

$$R_f = \{y \in Y : \exists x \in X, \quad y = f(x)\}.$$

3.1. Definíció. Az f függvény **injektív**, ha $f(x_1) \neq f(x_2)$ bármely $x_1 \neq x_2 \in D_f$ esetén. A függvény **szürjektív**, ha minden $y \in Y$ -hoz létezik x , melyre

$y = f(x)$. A függvény **bijektív**, ha injektív és szürjektív, azaz a hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű X és Y között.

3.2. Definíció. Adott két függvény, $f : X \rightarrow Y$ és $g : Y \rightarrow Z$. Az **összetett függvény** $X \rightarrow Z$ típusú hozzárendelés lesz, melyre $x \mapsto g(f(x))$. Jele: $g \circ f$, ahol g a külső függvény, f a belső függvény. Értelmezési tartománya

$$D_{g \circ f} = \{x : x \in D_f, f(x) \in D_g\}.$$

Példa. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin(x)$. Ekkor $f \circ g$ és $g \circ f$ is értelmezhető:

$$f \circ g(x) = \sin^2(x), \quad g \circ f(x) = \sin(x^2).$$

Ha a függvény bijektív, akkor létezik **inverz függvény**

$$f^{-1} : Y \rightarrow X,$$

melyre

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in X.$$

Illetve hasonlóképpen

$$f(f^{-1}(y)) = y, \quad \forall y \in Y.$$

Megjegyzés. A függvények esetén az f^{-1} jelölés **nem jelent reciprokot!** Egészen mást jelent, mint az $\frac{1}{f}$ függvény.

A fenti definíciók tetszőleges X és Y halmazok esetén értelmezhetőek.

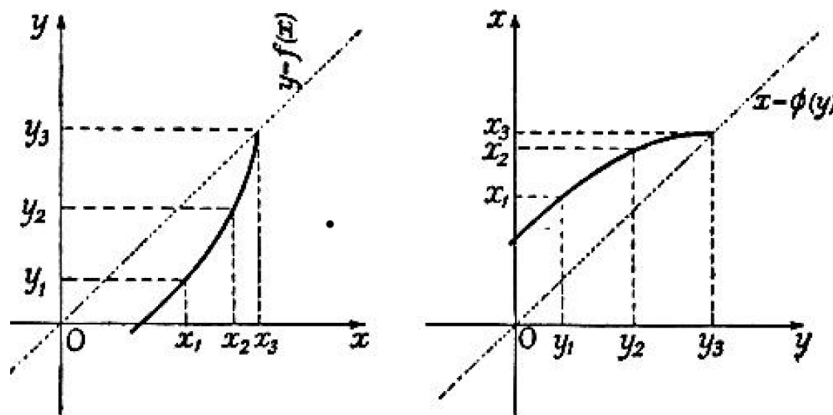
Egyelőre a csak **valós függvényekkel** foglalkozunk, tehát feltesszük, hogy

$$X \subset \mathbb{R}, \quad Y \subset \mathbb{R}.$$

3.3. Definíció. Adott $D \subset \mathbb{R}$ és $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ egy valós függvény. A **függvény gráfját** így értelmezzük:

$$\{(x, f(x)) : x \in D\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Megjegyzés. Valós függvények esetén szemléletesen az inverz függvény gráfját úgy kapjuk, hogy az x és y tengelyeket felcseréljük. Egy függvény akkor invertálható, ha bármely x tengellyel párhuzamos egyenes legfeljebb csak egy pontban metszi a gráfot.



3.2. ábra. Függvény és inverze.

3.4. Definíció. Az f függvény alulról (felülről) korlátos, ha R_f alulról (felülről) korlátos. Az f függvény **korlátos**, ha R_f korlátos.

Megjegyzés. Másképp fogalmazva, az f függvény korlátos, ha $\exists K$, hogy

$$|f(x)| \leq K, \quad \forall x \in D_f.$$

3.5. Definíció. Az f függvény **páros**, ha

1. D_f szimmetrikus, azaz $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ is teljesül,
2. $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in D_f$.

Az f függvény **páratlan**, ha D_f szimmetrikus és $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in D_f$.

Példa. Az $f(x) = x^2$ függvény páros, az $f(x) = x^5$ függvény páratlan.

3.6. Definíció. Az f függvény **monoton növő**, ha $\forall x_1, x_2 \in D_f$ esetén

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2).$$

f **szigorúan monoton növő**, ha minden $x_1, x_2 \in D_f$ esetén

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

Az f függvény **monoton fogyó**, ha $\forall x_1, x_2 \in D_f$ esetén

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2).$$

f **szigorúan monoton fogyó**, ha $\forall x_1, x_2 \in D_f$ esetén

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2).$$

3.7. Definíció. Az f függvény **periodikus** p periódussal, ha

$$f(x + p) = f(x) \quad \forall x, x + p \in D_f.$$

Megjegyzés. Ha egy függvény periodikus p periódussal, akkor p tetszőleges egész számú többszöröse is periódusa lesz.

3.1.2. Elemi függvények*

(Kiegészítő anyag)

Felsoroljuk az elemi függvények néhány alaptípusát, melyek már részben ismerősek lehetnek.

1. *Racionális függvények.* Ezek olyan függvények, melyeket az $y = x$ függvényből elemi algebrai műveletekkel kaphatunk meg.

Polinomok. Általános alakjuk a következő:

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad D_p = \mathbb{R}.$$

Például $n = 1$ esetén $l(x) = ax + b$ *lineáris* függvény, $n = 2$ esetén $q(x) = ax^2 + bx + c$ *kvadrátikus* függvény.

Racionális törtfüggvények. Ezek a függvények két polinom hányadosaként állnak elő:

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m}, \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad a_n \cdot b_m \neq 0.$$

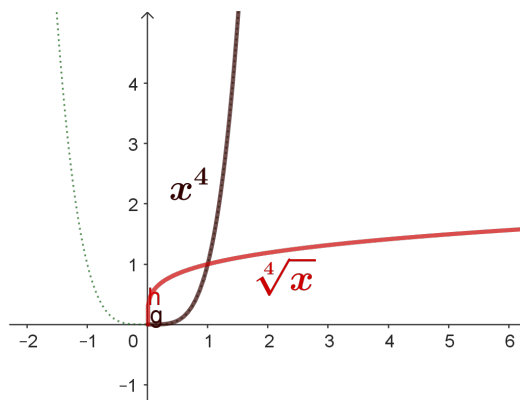
Ha a nevező zérushelyeit H jelöli, akkor $D_f = \mathbb{R} \setminus H$. Például:

$$f(x) = \frac{1}{x} \implies D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

2. *Algebrai függvények.* Ezek a racionális tört függvények inverzei. Például az $f(x) = x^n$ függvény $\mathbb{R}^+$ -re vett leszűkítését tekintjük. Ennek inverze:

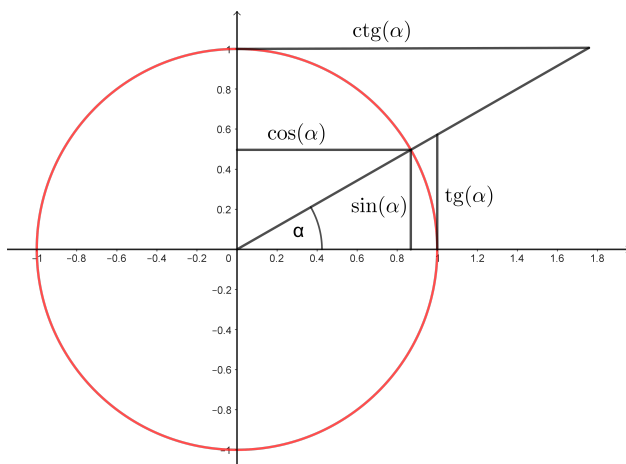
$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

Az inverzfüggvény értelmezési tartománya $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+ = \{x : x \geq 0\}$. Ha n páratlan, akkor a fenti inverz függvény ÉT-a kiterjeszthető a negatív x -ekre.



3.3. ábra. Példa algebrai függvényre.

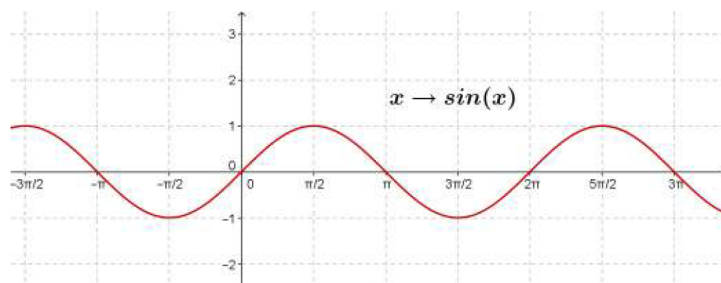
3. *Trigonometrikus függvények.* A szögfüggvények geometriai értelmezését középiskolából ismertnek tételezzük fel: Az alábbi geometriai definíció $\sin(\alpha)$



3.4. ábra. A trigonometrikus függvények geometriai értelmezése.

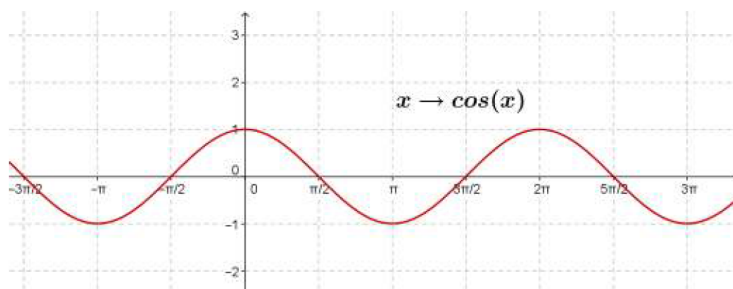
és $\cos(\alpha)$ függvényekre $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ esetén, a $\tan(\alpha)$ -re $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ esetén, illetve $\cot(\alpha)$ -ra $\alpha \in (0, \pi)$ esetén alkalmazható.

A fent definiált függvényeket 2π szerint periodikusan terjesztjük ki. Például:

3.5. ábra. A $\sin(x)$ függvény gráfja.

Megjegyzés. Ne felejtsük el, hogy a szögeket *radiánban* mérjük, nem fokban.

4. *Exponenciális és logaritmus függvények.* Ha $a > 0$, akkor $y = a^x$ egyelőre csak $x \in \mathbb{Q}$ esetén van értelmezve.

3.6. ábra. A $\cos(x)$ függvény gráfja.

3.2. Folytonosság, határérték

3.2.1. A folytonosság értelmezése

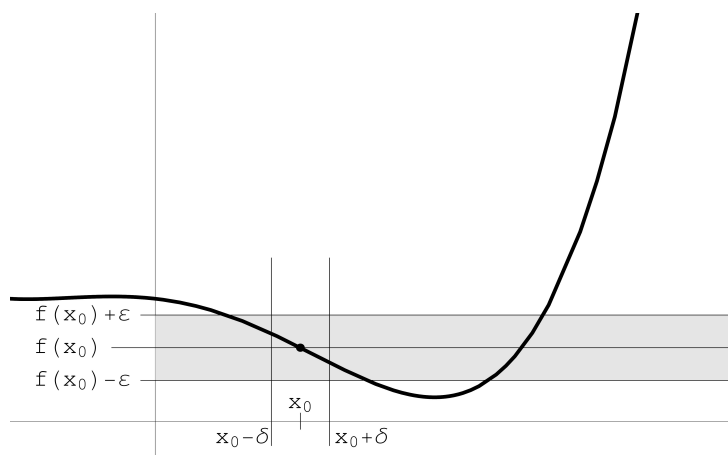
Heurisztikusan, egy függvény x_0 pontbeli folytonossága azt jelenti, hogy ha x_0 -ban picit változtatunk, akkor a függvényérték is picit változik, nincs ugrás ebben a pontban.

3.8. Definíció. Adott egy $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény és egy $x_0 \in D$. Azt mondjuk, hogy f az x_0 -**ban folytonos**, ha $\forall \varepsilon > 0$ hoz $\exists \delta > 0$, melyre teljesül, hogy

$$\forall x \in D, \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Szemléletesen így képzelhetjük el a folytonosságot egy x_0 pontban. Legyen az x_0 -hoz tartozó függvényérték $f(x_0) = y_0$. Az y_0 körül tekintünk egy $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ közti vízszintes sávot. Ekkor megadható az x_0 körül egy $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (függőleges) sáv, melyre a függvény grafikonja az $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ és $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ sávok metszetébe esik.

Definíció átfogalmazása: Az f függvény folytonos az $x_0 \in D_f$ pontban, ha $f(x_0)$ tetszőleges U környezetéhez létezik az x_0 -nak olyan V környezete, amelyre minden $x \in V$, $x \in D_f$ esetén $f(x) \in U$.



3.7. ábra. A folytonosság geometriai értelmezése.

Példa. Tekintsünk egy lineáris függvényt, legyen $f(x) = 5x + 3$ és $x_0 \in \mathbb{R}$ tetszőleges pont. Ekkor

$$|f(x) - f(x_0)| = |(5x + 3) - (5x_0 + 3)| = |5(x - x_0)|.$$

Adott $\varepsilon > 0$. Kérdés: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ mikor teljesül?

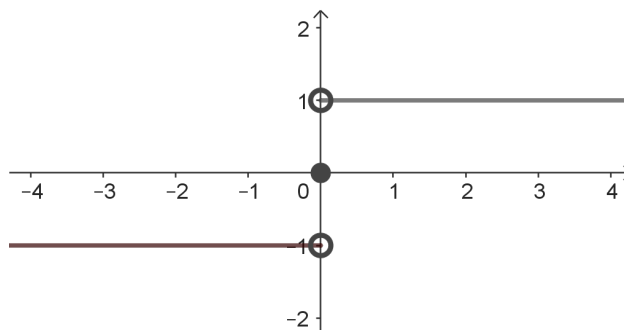
$\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ választással, ha $|x - x_0| < \varepsilon/5$, akkor

$$|f(x) - f(x_0)| < 5 \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon.$$

Megjegyzés. Szokás akkor is szakadási helyről beszélni, ha $x_0 \notin D_f$, de van x_0 -nak olyan $U = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ alakú környezete, melyre $U \setminus \{x_0\} \subset D_f$.

Példa. Előjel függvény. Ennek szokásos jelölése $\operatorname{sgn}(x)$.

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \\ -1 & \text{ha } x < 0 \end{cases}.$$

3.8. ábra. A $\operatorname{sgn}(x)$ függvény gráfja.

Értelmezési tartománya $D_f = \mathbb{R}$. f -nek a 0-ban szakadása van. $f(0) = 0$, és ha például $\varepsilon = \frac{1}{2}$, akkor $\nexists(-\delta, \delta)$ intervallum a 0 körül, melyben a függvényértékek abszolút értéke kisebb lesz mint $\frac{1}{2}$.

3.9. Definíció. Az f függvény értelmezési tartományának egy x_0 pontjában **sorozatfolytonos**, ha $\forall (x_n) \subset D_f$ sorozatra, melyre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

teljesül, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

3.1. Tétel. Az f függvény az x_0 -ban pontosan akkor folytonos, ha sorozatfolytonos.

Bizonyítás* Két részből áll a bizonyítás, két irányt kell belátni.

1. Tegyük fel, hogy f az x_0 -ban folytonos.

Legyen $(x_n) \subset D_f$ olyan sorozat, melyre $x_n \rightarrow x_0$. Igazolni kell, hogy $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A folytonosság miatt ehhez az ε -hoz létezik olyan $\delta > 0$, melyre

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Az (x_n) sorozat konvergenciája miatt ehhez a δ -hoz létezik $N(\delta)$ küszöbindex, hogy ha $n \geq N$, akkor $|x_n - x_0| < \delta$. Így ezekre az indexekre $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ teljesül.

2. Tegyük fel, hogy f az x_0 -ban sorozatfolytonos. Indirekt módon tegyük fel, hogy f nem folytonos x_0 -ban. Ez azt jelenti, hogy van olyan $\varepsilon > 0$, melyre " $\forall \delta$ rossz":

$$\forall \delta > 0 \text{ hoz } \exists x \in D_f : |x - x_0| < \delta, \quad \text{mégis} \quad |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Ekkor $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $\delta = \frac{1}{n}$ -hez is $\exists x_n$, melyre

$$|x_n - x_0| < \delta \quad \text{és} \quad |f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Tekintsük ezt az (x_n) sorozatot. Ez a következő tulajdonságú: $(x_n) \subset D_f$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ és mivel $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon \forall n$ -re, ezért $f(x_n)$ nem tart $f(x_0)$ -hoz, ez ellentmondás. Így az indirekt feltevésünk nem helyes, tehát f az x_0 -ban folytonos.

Példa. Dirichlet függvény. Legyen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, melynek definíciója:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális,} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális.} \end{cases}$$

Ez a függvény sehol nem folytonos. Valóban, ha $x_0 \in \mathbb{R}$ racionális, akkor legyen

$$x_n = x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n},$$

x_n irracionális szám. Erre a sorozatra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad f(x_n) \equiv 0.$$

Másrészt $f(x_0) = 1$, így nem teljesül a sorozatfolytonosság. Ha x_0 irracionális, akkor a sorozat n -dik tagja legyen x_0 végtelen tizedestört felírásában az első n tagot tartalmazó szám, ez racionális. Ekkor

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1 \neq f(x_0) = 0,$$

a függvény itt sem folytonos.

Megjegyzés. Közvetlenül is igazolható, hogy a Dirichlet függvény nem folytonos, például $\varepsilon = 0.5$ -re sem találhatunk megfelelő $\delta > 0$ -t.

3.2.2. Határérték

3.10. Definíció. Adott $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény és $x_0 \in \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $\exists U = (x_0 - r, x_0 + r)$ környezet, melyre $\forall x \in U \setminus \{x_0\}$ esetén $x \in D_f$. (Itt esetleg az $x_0 \notin D$ is előfordulhat). Az f **függvény határértéke x_0 -ban α** , ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz létezik $\exists \delta > 0$, melyre ha

$$0 < |x - x_0| < \delta, \quad x \in D \implies |f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$

Ezt így jelöljük:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha.$$

Figyelem! A határérték definíciójában az x_0 -beli helyettesítési érték nem játszik szerepet.

3.11. Definíció. (Általános definíció) Azt mondjuk, hogy f határértéke az $x_0 \in \mathbb{R}$ -ben $\alpha \in \mathbb{R}$, ha az α szám $\forall U$ környezetéhez x_0 -nak $\exists V$ környezete, melyre $\forall x \in V$, $x \neq x_0$ esetén $f(x) \in U$.

3.12. Definíció. Azt mondjuk, hogy f **jobboldali határértéke** az x_0 pontban $\alpha \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $\delta > 0$, melyre ha

$$x \in D_f, \quad x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$

Ezt így jelöljük:

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \alpha.$$

Azt mondjuk, hogy f **baloldali határértéke** x_0 -ban $\alpha \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $\delta > 0$, melyre ha

$$x \in D_f, \quad x_0 - \delta < x < x_0 \implies |f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$

Ezt így jelöljük:

$$\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \alpha.$$

A jobb- és baloldali határértékre használatos még az alábbi jelölés:

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0 + 0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0 - 0).$$

3.1. Állítás.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha \iff \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \alpha \text{ és } \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \alpha$$

A határérték-fogalmat kiterjesztjük arra az esetre, amikor $x_0 = \pm\infty$ és/vagy $\alpha = \pm\infty$ lesz.

3.13. Definíció. ("x₀ = ±∞ és α ∈ ℝ")

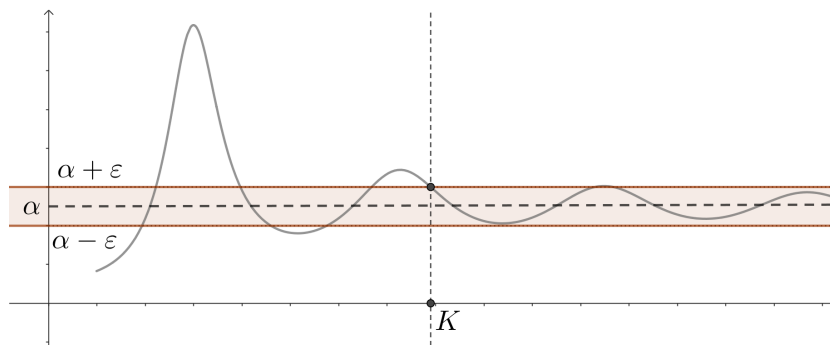
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha,$$

ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $K \in \mathbb{R}$, melyre minden $x \in D_f$, $x > K$ esetén $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ teljesül.

Hasonlóan,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \alpha,$$

ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $K \in \mathbb{R}$, melyre minden $x \in D_f$, $x < K$ esetén $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ teljesül.



3.9. ábra. Végtelenben a függvény határértéke véges.

Példa. Legyen

$$f(x) = \frac{x}{x+1}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Belátjuk hogy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor a

$$\left| \frac{x}{x+1} - 1 \right| < \varepsilon$$

feltétel azt jelenti, hogy

$$\left| \frac{x}{x+1} - 1 \right| = \left| \frac{1}{x+1} \right| < \varepsilon.$$

Így tetszőleges $\varepsilon > 0$ választás esetén

$$x > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = K \implies |f(x) - 1| < \varepsilon.$$

3.14. Definíció. ($\alpha = \pm\infty$, $x_0 \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty,$$

ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hez létezik $\delta > 0$, melyre minden $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$ esetén $f(x) > K$ teljesül. Hasonlóan,

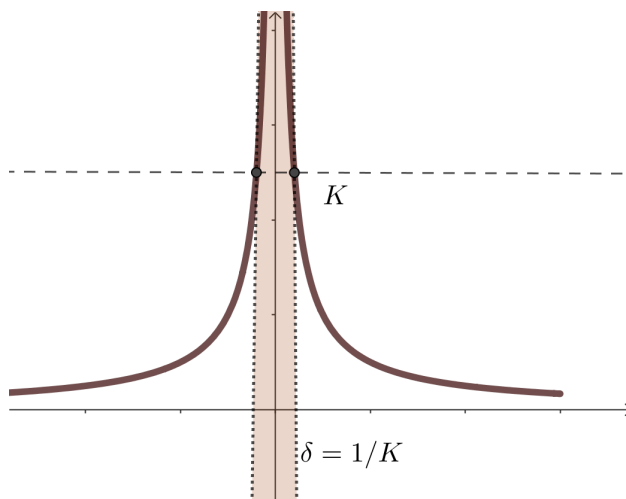
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty,$$

ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hez létezik olyan $\delta > 0$, melyre minden $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$ esetén $f(x) < K$ teljesül.

Példa. Legyen $f(x) = \frac{1}{|x|}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Belátjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

Ehhez igazolni kell, hogy minden $K \in \mathbb{R}$ -hez létezik δ , melyre $0 < |x| < \delta$ esetén teljesül, hogy $f(x) > K$. Legyen K tetszőleges. Ekkor $|x| < 1/K$ esetén $\frac{1}{|x|} > K$, azaz $f(x) > K$. Tehát $\delta = 1/K$ jó választás.



3.10. ábra. $f(x) = \frac{1}{|x|}$. Véges pontban a függvény határértéke végtelen.

3.15. Definíció. ($x_0 = +\infty$ és $\alpha = +\infty$)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty,$$

ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hez létezik $L \in \mathbb{R}$, melyre minden $x > L$, $x \in D_f$ esetén $f(x) > K$. Hasonlóan,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty,$$

ha minden $K \in \mathbb{R}$ -hez létezik olyan $L \in \mathbb{R}$, hogy minden $x < L$, $x \in D_f$ esetén $f(x) < K$.

Példa. Legyen $f(x) = x^2$, $D_f = \mathbb{R}$. Ekkor $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$.

Valóban, legyen $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ha $x > \sqrt{K} = L$, akkor $x^2 > K$.

Megjegyzés. Hasonlóan értelmezhető, hogy a jobb- illetve baloldali határérték a véges $x_0 \in \mathbb{R}$ -ben $+\infty$ illetve $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \infty.$$

3.2.3. Átviteli elv

3.2. Állítás. *(Függvény határérték és sorozat határérték közötti kapcsolat)*

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha$ akkor és csak akkor, ha minden $(x_n) \subset D_f$ sorozatra, melyre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad x_n \neq x_0$$

teljesül, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \alpha$.

2. $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \alpha$ akkor és csak akkor ha minden $(x_n) \subset D_f$ sorozatra, melyre

$$x_n > x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

teljesül, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \alpha$.

3. $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \alpha$ akkor és csak akkor, ha minden $(x_n) \subset D_f$ sorozatra, melyre

$$x_n < x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

teljesül, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \alpha$.

Példa. Legyen

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Meghatározzuk a $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ határértéket az átviteli elv alkalmazásával.

Legyen (x_n) olyan sorozat, melyre $x_n \neq 1$, és $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$. Ebben az esetben $f(x_n) = x_n + 1$, így a határérték:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + 1) = 2.$$

Megjegyzés. Az átviteli elvek $x_0 = \pm\infty$ és/vagy $\alpha = \pm\infty$ esetre is átfogalmazhatók.

3.2.4. A határérték tulajdonságai

3.3. Állítás. *Tegyük fel, hogy $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \beta$. Ekkor*

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = c\alpha$, $c \in \mathbb{R}$.
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \alpha + \beta$.
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \alpha\beta$.

A fenti tulajdonságok az átviteli elv alkalmazásával a sorozatokra igazolt tulajdonságokból következnek.

3.4. Állítás. *(Kompozíció határértéke.) Legyenek f, g olyan függvények, melyekre*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \beta,$$

ahol α, β, x_0 véges számok. Ekkor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \beta.$$

Bizonyítás* Átviteli elv segítségével *szinte* triviális.

Legyen (x_n) sorozat, melyre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0.$$

Mivel

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \alpha \implies \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \alpha.$$

Hasonlóan, mivel

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \beta, \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(g(x_n)) = \beta,$$

ezzel az állítást beláttuk.

Példa. Legyen

$$f(x) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A jobboldali határérték

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$$

kiszámítására a kompozícióra vonatkozó tulajdonságokat használjuk. Mivel

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x} = +\infty,$$

ezért

$$\lim_{x \rightarrow 0+} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty, \implies \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0.$$

Hasonlóan számolható a baloldali határérték:

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{x} = -\infty \implies \lim_{x \rightarrow 0-} 2^{\frac{1}{x}} = 0, \implies \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = 1.$$

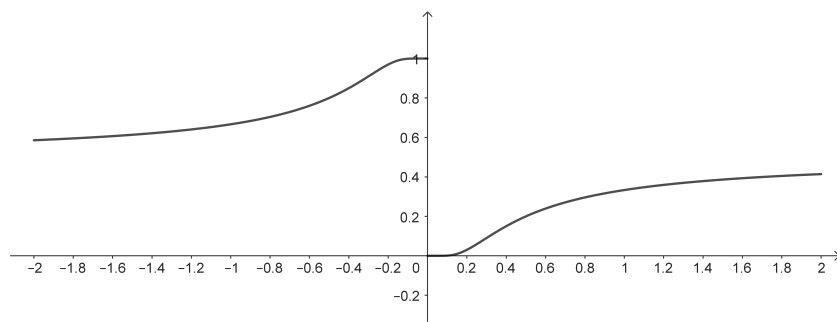
Tehát $f(0+0) \neq f(0-0)$, ezért $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nem létezik.

Példa. Legyen

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Belátjuk, hogy nem létezik az alábbi határérték:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$



3.11. ábra. Az $f(x) = \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$ függvény grafikonja a 0 pont körül.

Tekintsük ugyanis (x_n) és (y_n) sorozatokat, melyekre:

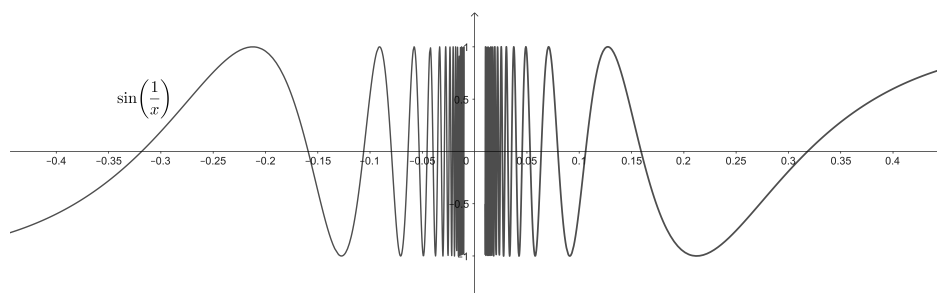
$$\frac{1}{x_n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \quad \frac{1}{y_n} = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi.$$

Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, és

$$f(x_n) \equiv 1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1,$$

$$f(y_n) \equiv -1 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = -1.$$

Sőt, minden $\alpha \in [-1, 1]$ -hez létezik (z_n) sorozat, hogy $z_n \rightarrow 0$ és $\sin\left(\frac{1}{z_n}\right) \rightarrow \alpha$.



3.12. ábra. Az $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ függvény a 0 közelében.

3.5. Állítás. *(A határérték monotonitása.) Legyenek $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ és $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ adott függvények, melyeknek létezik határértéke az x_0 pontban. Tegyük fel, hogy az x_0 pont valamely U környezetében igaz, hogy*

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in U \setminus \{x_0\}.$$

$$\text{Ekkor } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Megjegyzés. Ha az állításban a feltétel így szerepel:

$$f(x) < g(x) \quad \forall x \in U \setminus \{x_0\},$$

akkor is konklúzió határértékben változatlan:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Határértékben a két függvény "összeérhet".

3.6. Állítás. *(Rendőr-elv) Adottak az f , g és h függvények. Feltesszük, hogy az x_0 egy U környezetében teljesül, hogy*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad x \in U, \ x \neq x_0.$$

Feltesszük azt is, hogy a két szélső függvénynek van határértéke, és

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \alpha.$$

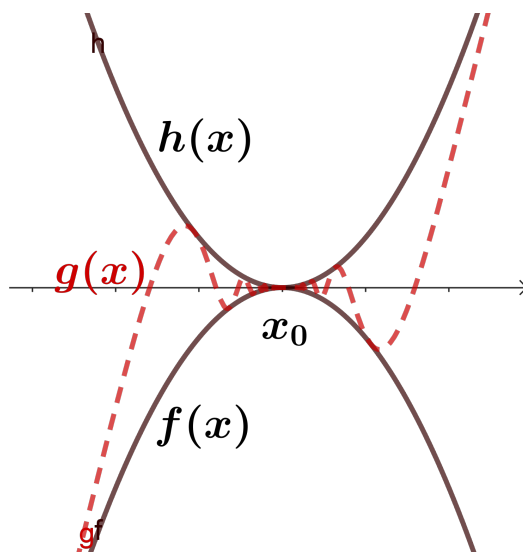
Ekkor a középső függvény határértéke is létezik, és:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \alpha.$$

Példa. Legyen

$$f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Határozzuk meg az $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x}$ határértéket.



3.13. ábra. Rendőr-elv szemléletesen.

Mivel $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$, ezért

$$-x \leq x \cdot \sin \frac{1}{x} \leq x.$$

Alkalmazzuk a fenti rendőr-elvet. Így

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} x = 0,$$

ezért

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0.$$

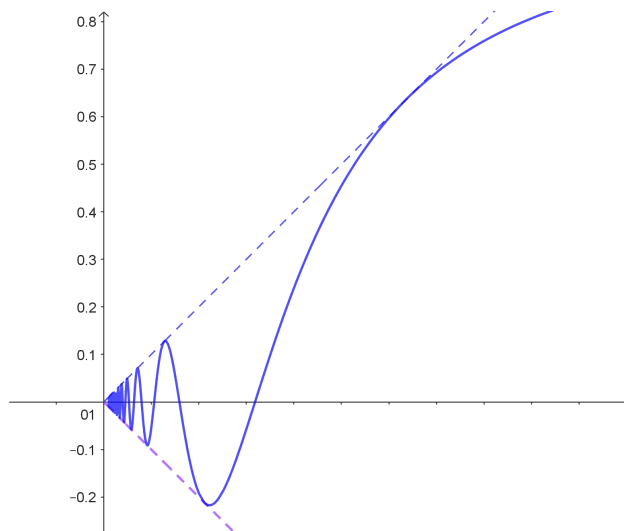
Példa. Legyen

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Belátjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Mivel $f(x)$ páros függvény, azaz $f(x) = f(-x)$, így csak a jobboldali határértéket vizsgáljuk.



3.14. ábra. Az $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ függvény a 0 közelében.

Tegyük fel tehát, hogy $x > 0$, és elegendő a $x < \frac{\pi}{2}$ intervallumot tekinteni. Itt felhasználjuk az alábbi triviális becsléseket (ld. a 3.15 ábrát):

$$\sin(x) < x, \quad \operatorname{tg}(x) > x.$$

Emiatt egyrészt $\frac{\sin(x)}{x} < 1$, másrészt

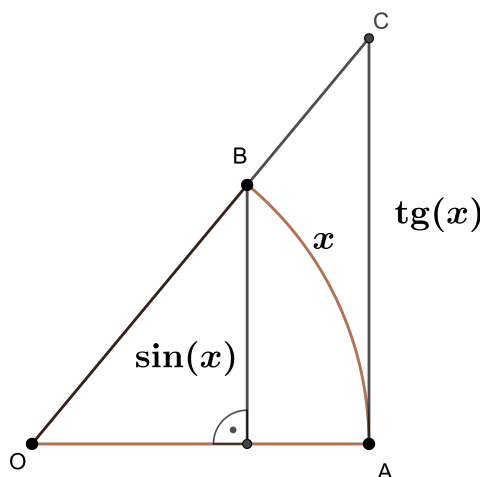
$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} > x \implies \frac{\sin(x)}{x} > \cos(x).$$

Összesítve:

$$1 > \frac{\sin(x)}{x} > \cos(x), \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Határértéket véve

$$1 \geq \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin(x)}{x} \geq \lim_{x \rightarrow 0+} \cos(x) = 1.$$



3.15. ábra. Az $\sin(x) < x < \operatorname{tg}(x)$ összefüggés szemléletes jelentése.

3.7. Állítás. Az f függvény pontosan akkor folytonos az $x_0 \in \operatorname{int} D_f$ **belső pontban**, ha létezik a $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ határérték, és

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

3.16. Definíció. Ha f az értelmezési tartomány egy x_0 pontjában nem folytonos, akkor itt **szakadási helye** van.

$x_0 \notin D_f$ akkor is **szakadási hely**, ha valamely $\delta > 0$ esetén $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \subset D_f$.

A szakadási helyek fajtái:

1. **Elsőfajú szakadás** van x_0 -ban, ha léteznek a

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0 + 0) < \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0 - 0) < \infty$$

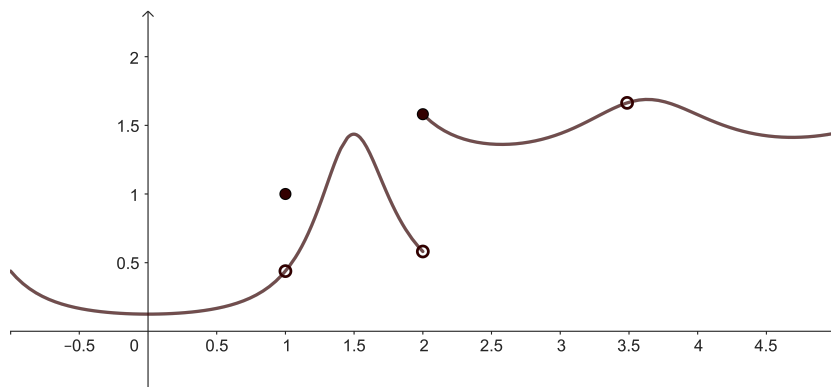
jobb- és baloldali határértékek.

Speciális esetben x_0 -ban **megszüntethető szakadás** van, ha ezek a jobb- és baloldali határértékek megegyeznek, de

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

Példa: $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ függvény, melynek ax $x_0 = 0$ -ban elsőfajú, nem megszüntethető szakadása van.

2. **Másodfajú a szakadás, ha nem elsőfajú.**



3.16. ábra. Elsőfajú szakadások típusai

3.2.5. Folytonos függvények tulajdonságai

3.8. Állítás. *Tegyük fel, hogy f folytonos az $x_0 \in \operatorname{int}(D_f)$ belső pontban és $f(x_0) > 0$. Ekkor létezik U környezete x_0 -nak, melyre*

$$f(x) > 0, \quad \forall x \in U \cap D_f.$$

Bizonyítás. Legyen $0 < \varepsilon < f(x_0)$. A folytonosság miatt létezik $\delta > 0$, melyre ha $|x - x_0| < \delta$ akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Ezen x pontokra tehát

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

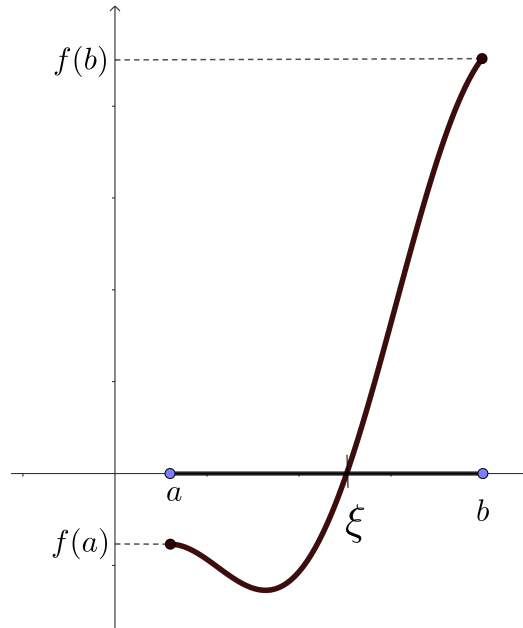
Mivel $0 < f(x_0) - \varepsilon$, ezért $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D_f$ esetén $f(x) > 0$.

3.17. Definíció. *Legyen $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ adott függvény. Azt mondjuk, hogy f folytonos a D_f -en, ha minden $x_0 \in D_f$ -re folytonos x_0 -ban.*

Megjegyzés. Ha $D_f = [a, b]$ zárt intervallum, akkor f **folytonos** $[a, b]$ -ben, ha az (a, b) intervallumon $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, és a végpontokban:

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow b-} f(x) = f(b).$$

3.2. Tétel. Adott $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Tegyük fel, hogy $f(a) < 0 < f(b)$. Ekkor létezik olyan $\xi \in (a, b)$ pont az intervallum belsejében, melyre $f(\xi) = 0$.



3.17. ábra. A Bolzano tétel szemléletesen.

Bizonyítás. Meghatározunk egy alkalmas ξ pontot.

1. Legyen $a_1 = a$ és $b_1 = b$.
2. Legyen $\xi_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$. Ha $f(\xi_1) = 0$, akkor készen vagyunk.
Ha $f(\xi_1) > 0$, akkor legyen $a_2 := a_1$, $b_2 := \xi_1$.

Ha $f(\xi_1) < 0$, akkor legyen $a_2 := c_1$, $b_2 := b_1$.

Ekkor az $[a_2, b_2] \subset [a, b]$ intervallum éppen fele hosszúságú, és

$$f(a_2) < 0, \quad f(b_2) > 0.$$

3. Újra *'próbálkozunk'*: legyen $\xi_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$.

Ha $f(\xi_2) = 0$, akkor készen vagyunk.

Ha $f(\xi_2) \neq 0$, akkor megkonstruáljuk az $[a_3, b_3]$ intervallumot úgy, hogy $f(a_3) < 0$ és $f(b_3) > 0$ teljesüljön, mint az előbb.

És így tovább. Ekkor két eset lehetséges:

- (i) vagy véges sok lépésben vége van az iterációnak, ekkor megkapjuk a kívánt ξ pontot.
- (ii) vagy "nincs vége", ekkor az intervallumok végpontjaiból álló sorozatokra teljesül, hogy

$$\begin{aligned} (a_n) : & f(a_n) < 0 \\ (b_n) : & f(b_n) > 0 \end{aligned}$$

Ezen kívül $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$, és az intervallumok hossza nullához tart. Ekkor a Cantor-féle közöspont-tétel szerint egyértelműen létezik a ξ közös pont, $\xi \in (a, b)$. Vegyük észre, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \xi, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi.$$

Mivel f folytonos ξ -ben ezért minden (x_n) sorozatra, melyre

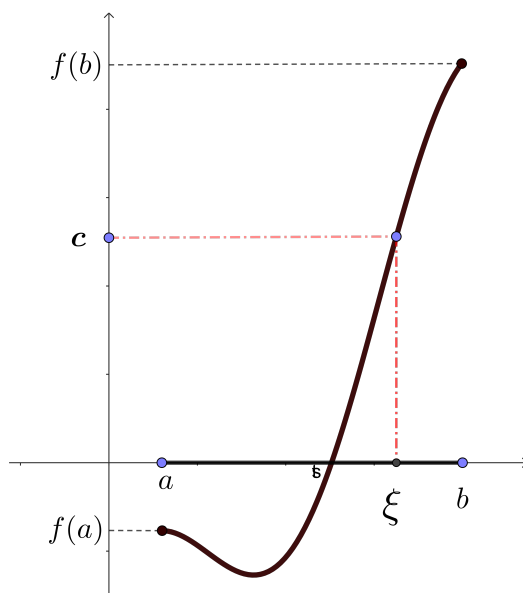
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(\xi),$$

tehát

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\xi), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(\xi).$$

Emiatt $f(\xi) \leq 0$ és $f(\xi) \geq 0$, ezért $f(\xi) = 0$.

3.1. Következmény (Bolzano-tétel). *Tegyük fel, hogy f folytonos az $[a, b]$ intervallumban, $f(a) < f(b)$. Ha c tetszőleges szám, melyre $f(a) < c < f(b)$, akkor létezik olyan $\xi \in (a, b)$, melyre $f(\xi) = c$.*



3.18. ábra. A Bolzano tétel általános esetben

3.2. Következmény. *Ha f páratlan fokú polinom, akkor van valós gyöke.*

3.2.6. Inverz függvény

3.18. Definíció. *Tegyük fel, hogy $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ szigorúan növekvő, folytonos függvény. Ekkor minden $c \in [f(a), f(b)]$ számhoz egyértelműen létezik $\xi \in [a, b]$, melyre $f(\xi) = c$. Ez a $c \mapsto \xi$ leképezés az **inverz függvény**:*

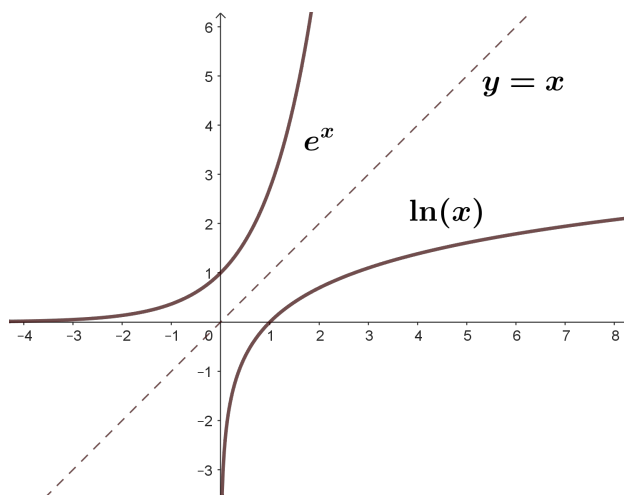
$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b].$$

3.9. Állítás. *A fent definiált inverz függvény is folytonos lesz.*

3.3. Következmény. *Ha $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ szigorúan monoton és folytonos függvény, akkor invertálható és az inverz függvény is folytonos.*

Példa. Legyen $f(x) = e^x$. Mivel $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ szigorúan monoton növekvő az egész $\mathbb{R}$ -en, ezért létezik az inverze:

$$(e^x)^{-1} = \log_e x =: \ln x, \quad \ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}.$$



3.19. ábra. Az exponenciális függvény és inverze.

Trigonometrikus függvények inverzei

$f(x) = \sin(x)$

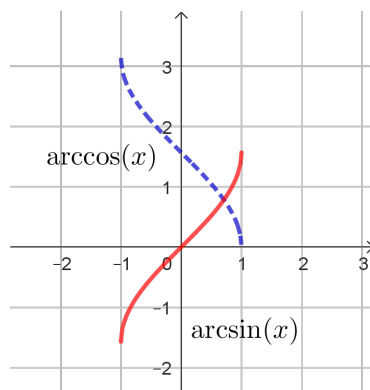
A függvény periodikus, ezért csak alkalmas megszorítása lehet invertálható. Tudjuk, hogy a $\sin$ függvény a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ intervallumban szigorúan monoton növekvő. Itt már van inverze, ezt $\arcsin(x)$ jelöli.

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

$$\underline{f(x) = \cos(x)}$$

Hasonlóan, ha $x \in [0, \pi]$, akkor ezen a szakaszon a $\cos$ függvény szigorúan monoton fogyó, tehát invertálható. Az inverz függvényt $\arccos(x)$ jelöli. Mivel most $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$, ezért inverze:

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi].$$



3.20. ábra. A $\sin(x)$ és $\cos(x)$ függvény inverze.

$$\underline{f(x) = \operatorname{tg}(x)}$$

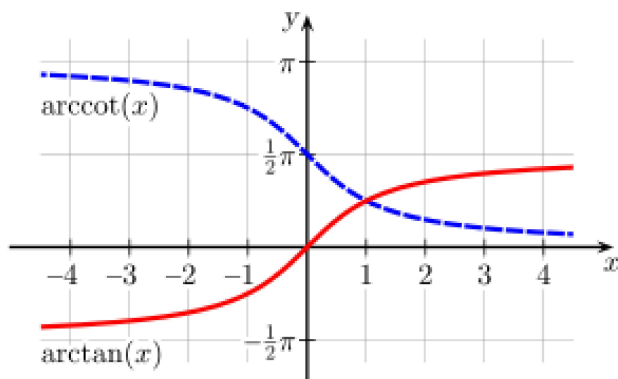
A $\operatorname{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ leszűkítést tekintjük, itt a függvény szigorúan monoton növekvő. Ezért létezik inverze, melyet $\arctan(x)$ jelöl.

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

$$\underline{f(x) = \operatorname{ctg}(x)}$$

Az $f(x) = \operatorname{ctg}(x)$ függvény megszorítását tekintjük a $(0, \pi)$ intervallumra, ahol szigorúan fogyó. Ekkor f invertálható, és ezt így jelöljük $f^{-1} = \operatorname{arccotg}$.

$$\operatorname{arccotg} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi).$$



3.21. ábra. A $\operatorname{tg}(x)$ és $\operatorname{ctg}(x)$ függvény inverze.

3.2.7. Hiperbolikus függvények

3.19. Definíció. A *sinus hiperbolikus* függvény $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, melyet így értelmezünk:

$$\operatorname{sh}(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ez szigorúan monoton növény, páratlan függvény.

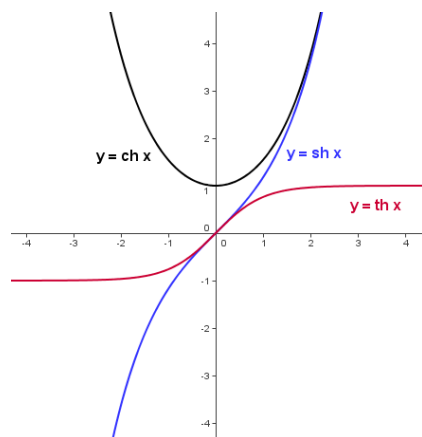
3.20. Definíció. A *cosinus hiperbolikus* függvény $\operatorname{ch} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, melyet így értelmezünk:

$$\operatorname{ch}(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Ez páros függvény, ami szigorúan monoton növény $\mathbb{R}^+$ -n.

3.21. Definíció. A *tangens hiperbolikus* függvényt így definiáljuk:

$$\operatorname{th}(x) := \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad D_{\operatorname{th}} = \mathbb{R}.$$



3.22. ábra. Az $\operatorname{sh}(x)$, $\operatorname{ch}(x)$ és $\operatorname{th}(x)$ függvények

3.10. Állítás. A $\operatorname{ch}(x)$ és $\operatorname{sh}(x)$ egyik alaptulajdonsága:

$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítás. A definíciók alapján:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}^2(x) &= \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} \\ \operatorname{ch}^2(x) &= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}, \end{aligned}$$

ahonnan az állítás következik.

3.2.8. Korlátos és zárt halmazon folytonos függvények

Fontos speciális eset, amikor a függvény értelmezési tartománya $D_f = [a, b]$ korlátos és zárt ($\equiv$ *kompakt*) halmaz.

3.3. Tétel. (*Weierstrass I. tétele*) Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f korlátos.

Bizonyítás* Indirekt módon tegyük fel például, hogy a függvény felülről nem korlátos. Ez azt jelenti, hogy minden n -hez létezik $x_n \in [a, b]$, melyre $f(x_n) > n$. Tekintsük ezt az (x_n) sorozatot. Mivel $a \leq x_n \leq b$, ezért a sorozat korlátos, tehát létezik (x_{n_k}) konvergens részsorozata a Bolzano-Weierstrass tétel miatt. Ennek a sorozatnak a határértéke legyen:

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi.$$

Mivel az $[a, b]$ zárt intervallum, ezért $\xi \in [a, b]$. f folytonos ξ -ben, tehát sorozatfolytonos is. Ezért

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\xi),$$

de a konstrukció szerint $f(x_{n_k}) > n_k$, ami ellentmondás.

3.4. Tétel. (*Weierstrass II. tétele*) Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f felveszi minimumát és maximumát $[a, b]$ -n.

Bizonyítás* Belátjuk például a maximum létezését. Legyen

$$H = \{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Az előző tétel szerint ez a halmaz korlátos. Legyen $\beta = \sup(H) < \infty$. Ez azt jelenti, hogy minden n -re létezik $x_n \in [a, b]$, melyre a függvényérték

$$\beta - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq \beta.$$

Erre a sorozatra $(x_n) \subset [a, b]$, ezért korlátos, így létezik konvergens (x_{n_k}) részsorozata. A részsorozat határértéke:

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} (x_{n_k}) = \xi \in [a, b].$$

A sorozatfolytonosság miatt egyrészt

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\xi),$$

másrészt

$$\beta - \frac{1}{n} < f(x_{n_k}) \leq \beta \implies \beta = f(\xi).$$

Ezért $\beta \in H$, tehát valóban $\beta = \max(H)$.

3.2.9. Nevezetes határértékek

Ebben a fejezetben olyan függvény határértékeket gyűjtöttünk össze, melyek részben a számsorozatok határértékének általánosításai, és a jövőben hasznosak lesznek.

1. *Példa.*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$$

Igazolni kell, hogy minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik K , hogy ha $x > K$, akkor

$$1 - \varepsilon < x^{\frac{1}{x}} < 1 + \varepsilon.$$

$x > 1$ esetén nyilván

$$1 < x^{\frac{1}{x}}.$$

Legyen $n = [x]$, ahol $[x]$ az x valós szám egész része, ami az x -nél nem nagyobb egészek közt a legnagyobb. Ekkor

$$n \leq x < n + 1,$$

ezért

$$x^{\frac{1}{x}} < (n + 1)^{\frac{1}{x}} \leq \sqrt[n]{n + 1}.$$

Mivel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n + 1} = 1,$$

ezért létezik N , melyre ha $n > N$, akkor

$$\sqrt[n]{n+1} < 1 + \varepsilon.$$

Így ha $[x] \geq N$, akkor

$$x^{\frac{1}{x}} < 1 + \varepsilon.$$

2. *Példa.*

Tekintsük az $f(x) = \frac{\log_c x}{x}$ függvényt, $c > 1$ mellett.

Ennek határértéke $+\infty$ -ben:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_c x}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \log_c x = \lim_{x \rightarrow \infty} \log_c (x^{\frac{1}{x}}) = \\ &= \log_c \left(\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} \right) = \log_c 1 = 0. \end{aligned}$$

Megjegyzés. $0 < c < 1$ esetén triviálisan teljesül, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_c x}{x} = 0,$$

hiszen ekkor $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_c x = 0$.

3. *Példa.* Láttuk, hogy az e szám az alábbi sorozat határértéke:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Belátjuk, hogy a határértéket tekinthetjük a valós számokon keresztül is, azaz

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x.$$

Valóban, például az alsó becslés

$$\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{[x]} \right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{[x]} \right)^{[x]+1} = \left(1 + \frac{1}{[x]} \right) \left(1 + \frac{1}{[x]} \right)^{[x]}.$$

Ezért

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right) \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]} = e.$$

Hasonlóan, a $-\infty$ -beli határérték:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{u}\right)^{-u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{u}\right)^u} = \frac{1}{e^{-1}} = e$$

3.⁺ *Példa.* Ugyanígy igazolható, hogy tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a.$$

3.⁺⁺ *Példa.* Az e szám fenti előállításait használva:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^x = e.$$

4. *Példa.* Belátjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1.$$

Valóban,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

5. *Példa.* Az előző példabeli függvény határértékét a 0-ban nézzük:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0,$$

mert $\left| x \cdot \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|.$

6. *Példa.* Legyen $f(x) = x^x$, $x > 0$. Értelmezni szeretnénk a 0^0 értéket a függvény határértékeként. $u = 1/x$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{u}} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u^{\frac{1}{u}}} = 1$$

9. *Példa.* Legyen

$$f(x) = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0},$$

ahol x_0 rögzített szám, $n \in \mathbb{N}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$. Ekkor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x_0^{n-1})}{x - x_0} = nx_0^{n-1}.$$

Közben felhasználtuk, hogy $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$, ha g folytonos.

3.2.10. Egyenletes folytonosság*

(*Kiegészítő tananyag.*)

Emlékeztetünk arra, hogy $x_0 \in D_f$ esetén f folytonossága x_0 -ban egy lokális tulajdonság: $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ az ismert feltételekkel.

Van-e olyan függvény, mely bármely ε esetén minden $x_0 \in D_f$ -re "közös" δ -val rendelkezik, $\delta = \delta(\varepsilon, \emptyset)$?

Példa. Legyen $f(x) = x^2 + 1$, a $D_f = [1, 2]$ értelmezési tartományon. Ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor van hozzá univerzális δ -t.

$$\left| f(x) - f(x_0) \right| = \left| x^2 + 1 - x_0^2 - 1 \right| = \left| (x - x_0)(x + x_0) \right| \leq |x - x_0| \cdot 4,$$

hiszen $|x + x_0| \leq 4$ teljesül $\forall x, x_0 \in [1, 2]$.

Ezért adott ε esetén minden x_0 -ra jó a $\delta = \varepsilon/4$ választás.

3.22. Definíció. Az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **egyenletesen folytonos** D -ben, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $\delta = \delta(\varepsilon)$, melyre minden $x_1, x_2 \in D$ esetén

$$|x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

3.4. Következmény. *Ha f egyenletesen folytonos D -n, akkor $\forall x_0 \in D$ -re x_0 -ban folytonos.*

Példa. Legyen $f(x) = x^2 + 1$, $D = [0, +\infty)$. Belátjuk, hogy f nem egyenletesen folytonos. Megmutatjuk, hogy van olyan ε , melyre minden δ "rossz". Valóban, legyen $\varepsilon = 2$. Ekkor tetszőleges $\delta > 0$ -hoz létezik n , melyre $\frac{1}{n} < \delta$. Legyen ekkor

$$x_1 = n, \quad x_2 = n + \frac{1}{n}, \quad \implies \quad |x_1 - x_2| < \delta.$$

Mégis

$$\left| f(x_1) - f(x_2) \right| = \left| n^2 + 1 - \left(n + \frac{1}{n} \right)^2 - 1 \right| = \left| n^2 - n^2 - 2 - \frac{1}{n^2} \right| = 2 + \frac{1}{n^2} > 2.$$

Példa. Legyen

$$f(x) = \sin(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Belátjuk, hogy *egyenletesen folytonos* az egész $\mathbb{R}$ -en. Ehhez felhasználjuk, hogy

$$\sin(x) - \sin(x_0) = 2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right).$$

Ezért

$$\begin{aligned} |\sin(x) - \sin(x_0)| &\leq 2 \left| \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \right| \cdot \left| \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) \right| \leq \\ &\leq 2 \frac{|x - x_0|}{2} \cdot 1 = |x - x_0|. \end{aligned}$$

Felhasználtuk, hogy $|\sin(\alpha)| \leq |\alpha|$ és $|\cos(\beta)| \leq 1$. Ebben az esetben a $\delta = \varepsilon$ választás jó x_0 -tól függetlenül, tehát a függvény egyenletesen folytonos.

Példa. $f(x) = 1/x$, $D = (0, 1)$. Belátjuk, hogy f *nem egyenletesen folytonos*. Legyen $\delta > 0$ tetszőleges, ekkor létezik olyan n , melyre

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < \delta.$$

Válasszuk a következő két alappontot:

$$x_1 = \frac{1}{n}, \quad x_2 = \frac{1}{n+1}.$$

Ekkor

$$|x_1 - x_2| < \delta,$$

és mégis

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |n - (n+1)| = 1.$$

Tehát tetszőleges δ -hoz megadható két olyan pont, mely közelebb van, mint δ , viszont a függvényértékek eltérése nagyobb, mint például $1/2$.

3.5. Tétel. (*Heine tétel*) *Tegyük fel, hogy az f függvény értelmezési tartománya korlátos és zárt intervallum. Ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, akkor egyenletesen is folytonos.*

Bizonyítás. Indirekt módon látjuk be az állítást. Feltesszük, hogy van olyan $\varepsilon > 0$, melyre nincs minden x_0 -ra közösen jó δ , azaz minden $\delta > 0$ "rossz". Ezért például $\delta = 1/n$ sem jó. Ez azt jelenti, hogy vannak olyan $x_n, y_n \in [a, b]$ számok, melyekre

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n},$$

és mégis

$$|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon. \quad (3.1)$$

Tekintsük az (x_n) sorozatot. Ez korlátos, tehát létezik konvergens részsorozata: (x_{m_k}) . Hasonlóan, az (y_{m_k}) sorozat korlátos, tehát létezik konvergens részsorozata: (y_{n_k}) . Ezek határértéke:

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0, \quad \lim_{m_k \rightarrow \infty} y_{m_k} = y_0.$$

Mivel $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, ezért a részsorozatok határértékei egyenlők: $x_0 = y_0$. Ebben a pontban is folytonos a függvény, tehát sorozatfolytonos is. Ezért

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) = \lim_{m_k \rightarrow \infty} f(y_{m_k}) = f(y_0).$$

Ez ellentmondás a (3.1) egyenlőtlenséggel.

Megjegyzés. $f(x) = \frac{1}{x}$ megszorítása a $[\delta, 1]$, $(0 < \delta < 1)$ halmazra egyenletesen folytonos a Heine tétel miatt. Hasonlóképpen $f(x) = x^2$ megszorítása a $[0, K]$ intervallumra $(K > 0)$ is egyenletesen folytonos.

Példa. $f(x) = x^5 + 4x^2 + 3$, $D_f = (0, 1]$. Egyenletesen folytonos-e? Igen, hiszen a $[0, 1]$ intervallumon egyenletesen folytonos, ezért annak tetszőleges részhalmazán is egyenletesen folytonos.

3.6. Tétel. *(Elégséges feltétel egyenletes folytonosságra) Legyen f folytonos függvény, $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ véges. Ekkor f egyenletesen folytonos.*

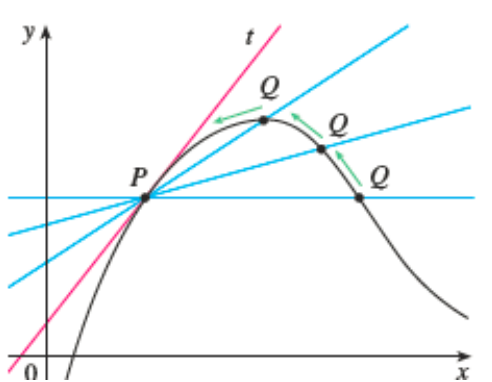
4. fejezet

Differenciálszámítás

4.1. Differenciálhányados, derivált

Értelmezni fogjuk egy függvény gráf valamely $P = (x_0, f(x_0))$ pontjához tartozó érintő egyenesét.

Az érintőt szelővel közelítjük, aminek meredekségét ($\equiv$ iránytangensét) adjuk meg. Legyen $Q = (x, f(x))$ a gráf egy tetszőleges *másik* pontja.



4.1. ábra. A szelők közelítik az érintőt

Ekkor a P és Q pontokat összekötő szelő meredeksége:

$$m(x) = \operatorname{tg} \alpha(x) = \frac{y - y_0}{x - x_0}, \quad y_0 = f(x_0), \quad y = f(x).$$

Ha $x \rightarrow x_0$ esetén létezik a fenti $\operatorname{tg} \alpha(x)$ határértéke, akkor az érintő egyenes létezik, meredeksége a kapott határérték.

4.1. Definíció. Az f függvény $P = (x_0, y_0)$ ponthoz tartozó *érintője* olyan egyenes, ami

- átmegy a ponton,
- meredeksége $m = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0}$

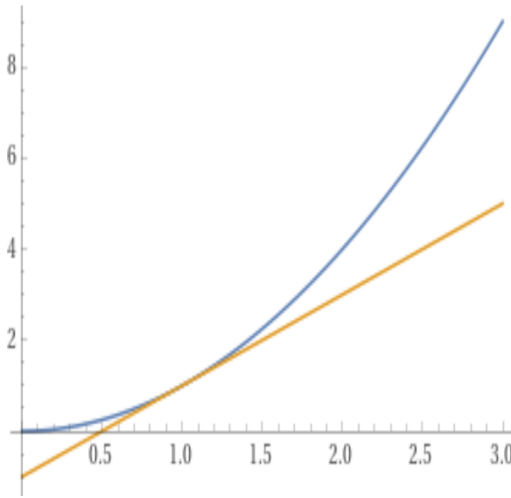
Példa. Határozzuk meg az $y = x^2$ parabola $P(1, 1)$ pontjához húzott érintő egyenes egyenletét.

Megoldás: Most $x_0 = 1$, $f(x) = x^2$. A meredekség:

$$m = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Az $(x_0, y_0) = (1, 1)$ ponton átmenő és $m = 2$ meredekségű egyenes:

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \text{azaz} \quad y = 2x - 1$$



4.2. ábra. $y = x^2$ és egyik érintője

4.2. Definíció. Adott egy $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény és $x_0 \in \text{int} D$ az $\acute{E}T$ egy rögzített belső pontja. Az x ponthoz tartozó **differentiáhányados** (különbségi hányados) a szelő meredeksége:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad x \in D.$$

A **függvény differentiálható** x_0 -ban, ha létezik és véges ez a határérték:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ennek a határértéknek elnevezése: **derivált**, vagy **differenciálhányados**.

Jele:

$$f'(x_0) = \text{''} \lim_{\Delta x} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \text{''} = \frac{df}{dx}(x_0)$$

Vezessük be a $h = x - x_0$ jelölést. Ekkor $x \rightarrow x_0$ azzal ekvivalens, hogy $h \rightarrow 0$. Így a derivált egy ekvivalens definícióját kapjuk:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Példa. Görbe mentén mozgó pont x idő alatt $y = f(x)$ utat tesz meg. Az $[x_0, x_0 + h]$ időintervallumban az *átlagsebesség*

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Egyre kisebb h , sőt $h \rightarrow 0$ esetén: *pillanatnyi sebességet* kapunk:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Ez a derivált (egyik) fizikai jelentése. Szokás még a fizikában az $\dot{f}(x)$ jelölés is (azaz *vessző* helyett egy *pont* kerül f fölé).

4.3. Definíció. Adott egy f függvény és $x_0 \in \text{int} D_f$. A függvény **jobboldali deriváltja** x_0 -ban:

$$f'_+(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

ha ez a határérték létezik és véges. A függvény **baloldali deriváltja** x_0 -ban:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

ha ez a határérték létezik és véges.

4.1. Állítás. f differenciálhatósága x_0 -ban azzal ekvivalens, hogy létezik $f'_+(x_0)$ és $f'_-(x_0)$, és ezek megegyeznek:

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

4.4. Definíció. $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható, ha $\forall x_0 \in (a, b)$ -ban differenciálható.

1. *Példa.* $f(x) \equiv c$ konstans függvény. Minden $x_0 \in \mathbb{R}$ belső pontja D_f -nek.

Ez a függvény differenciálható:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

2. *Példa.* $f(x) = x$ A függvény differenciálható, és deriváltja:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

3. *Példa.* $f(x) = x^n$, $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$. A függvény differenciálható és deriváltja:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \dots + x_0^{n-1}) = n x_0^{n-1},$$

ezt már láttuk. Tehát $(x^n)' = n x^{n-1}$.

4. *Példa.* $f(x) = \sin(x)$. Egy trigonometrikus azonosságot használunk:

$$\sin(x) - \sin(x_0) = 2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right).$$

Így határértékben a differenciahányados:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)}{\frac{x - x_0}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right) = 1 \cdot \cos(x_0). \end{aligned}$$

Az utolsó lépésben így alakítottuk az első limest:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)}{\frac{x - x_0}{2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1.$$

Tehát azt kaptuk, hogy $\sin'(x) = \cos(x)$.

5. *Példa.* $f(x) = |x|$, $D_f = \mathbb{R}$. Ha $x_0 > 0$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1,$$

hiszen a lim-ben is $x > 0$ teljesül, ha x már elegendően közel került x_0 -hoz.

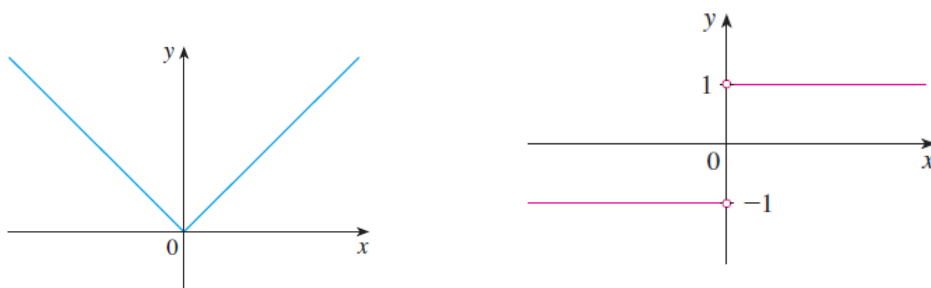
Hasonlóan, ha $x_0 < 0$, akkor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-x + x_0}{x - x_0} = -1.$$

De $x_0 = 0$ -ban a határérték nem létezik:

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - 0}{x - 0},$$

ezért az $f(x) = |x|$ függvény nem deriválható az $x_0 = 0$ pontban.



4.3. ábra. Az $f(x) = |x|$ függvény és deriváltja

A fenti ábrán látható, hogy a deriválhatóság azt jelenti, hogy a függvény gráfja *sima*.

6. *Példa.* $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Legyen $x_0 > 0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}.$$

Ezért határértéket véve

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Tehát az f függvény a $(0, \infty)$ intervallumban deriválható és $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Folytonosság és deriválhatóság kapcsolata

Láttuk, hogy f x_0 -beli folytonosságából még nem következik a differenciálhatóság. Például $f(x) = |x|$ folytonos $x_0 = 0$ -ban, de nem deriválható.

Fordítva azonban már igaz az alábbi tulajdonság:

4.2. Állítás. *Ha f differenciálható x_0 -ban, akkor ott folytonos is.*

Bizonyítás* Mivel

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

ezért ha $|x - x_0|$ elegendően kicsi, akkor

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| < K \implies |f(x) - f(x_0)| < K|x - x_0|,$$

például $K = |f'(x_0)| + 1$. Ebből a sorozatfolytonosság triviálisan következik.

4.2. Differenciálási szabályok

4.5. Definíció. *Az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény differenciálható D -ben, ha minden $x_0 \in D$ pontban differenciálható.*

A deriválást tekinthetjük úgy, mint egy hozzárendelést: mely egy differenciálható függvényhez hozzárendeli deriváltfüggvényét:

$$f \mapsto f'.$$

Definiáljuk az alábbi függvény-halmazokat:

$$\mathbf{X} := \{f : f(a, b) \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ differenciálható}\}, \quad \mathbf{Y} := \{f : f(a, b) \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

Ekkor a differenciálás művelete egy

$$\mathbf{Dif} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$$

operátor, amely egy függvényhez másik függvényt rendel.

4.1. Tétel. *(Differenciálási szabályok) Legyenek f és g differenciálható függvények. Ekkor*

1. $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$
2. $(cf)'(x) = cf'(x), c \in \mathbb{R}.$
3. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$
4. *Tegyük fel, hogy $g(x) \neq 0$, ekkor*

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}.$$

5. *Tegyük fel, hogy $g(x) \neq 0$, ekkor*

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

6. *Láncszabály*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Bizonyítás.

3. Szorzat deriválási szabály:

$$\begin{aligned}
 (fg)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) + g(x_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},
 \end{aligned}$$

ahonnan felhasználva f folytonosságát következik az állítás.

4. Reciprok deriválási szabály:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{g(x)} \right)' &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x - x_0} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{-1}{g(x)g(x_0)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = \frac{-1}{g^2(x_0)} g'(x_0).
 \end{aligned}$$

6. Láncszabály:

$$\begin{aligned}
 (f \circ g)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.
 \end{aligned}$$

*Figyelem! Szorzat deriváltja **nem egyenlő** a deriváltak szorzatával!*

1. Példa. $f(x) = \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

A $\operatorname{tg}(x)$ függvényben a számláló és nevező deriváltja:

$$\sin'(x) = \cos(x), \quad \cos'(x) = -\sin(x).$$

Ezért a hányados-függvény deriváltja

$$\operatorname{tg}'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - (-\sin(x))\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Másképp felírva

$$\operatorname{tg}'(x) = \dots = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \operatorname{tg}^2(x).$$

2. *Példa.* $f(x) = (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 5}$

Az első tényező deriváltja $(x^2 + 1)' = 2x + 0$. A második tényező összetett függvény, a külső függvény: $g(x) = \sqrt{x}$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, a belső függvény: $h(x) = x^2 + 5$, $h'(x) = 2x + 0$. Így

$$(g \circ h)'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 5}} 2x.$$

Tehát a szorzat-függvény deriváltja:

$$f'(x) = 2x\sqrt{x^2 + 5} + (x^2 + 1)\frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}.$$

Az $f'(x_0)$ derivált definíciója az $(x_0, f(x_0))$ ponthoz húzott érintőegyenes meredeksége volt. Ebből következik, hogy ha f differenciálható x_0 -ban, akkor

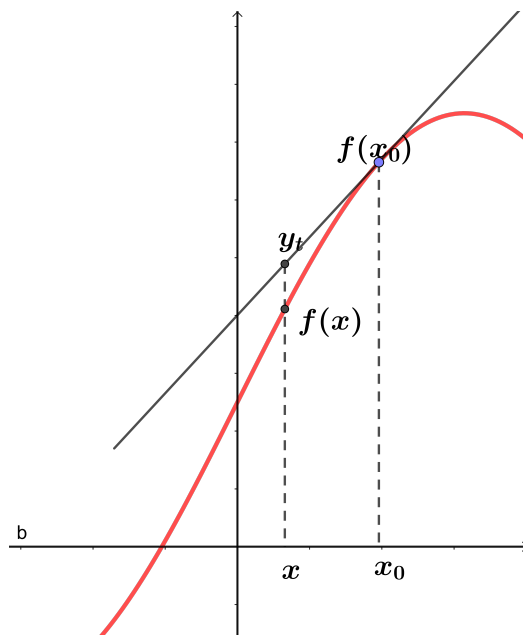
$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0).$$

Itt az $\approx$ jel azt jelenti, hogy $f(x)$ közelíthető ebben az értelemben:

$$\frac{f(x) - (f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0))}{x - x_0} \longrightarrow 0, \quad \text{ha } x \rightarrow x_0.$$

4.6. Definíció. Legyen x_0 az f függvény értelmezési tartományának belső pontja, itt differenciálható. Ekkor a függvény x_0 -hoz tartozó **lineáris érintő egyenese**

$$y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0).$$



Példa. $f(x) = \sqrt{x+3}$. Ennek lineáris közelítés $x_0 = 1$ -ben:

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1)$$

A függvényérték $f(1) = 2$. A derivált

$$\left(\sqrt{x+3}\right)' = \left((x+3)^{1/2}\right)' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x+3}}.$$

Tehát $f'(1) = \frac{1}{4}$, ezért az érintő egyenlete

$$y = 2 + \frac{1}{4}(x - 1) = \frac{7}{4} + \frac{x}{4}.$$

A lineáris közelítés az $(1, 2)$ pont körül:

$$\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}.$$

Így például

$$\sqrt{3.98} \approx \frac{7}{4} + \frac{0.98}{4} = 1.995.$$

Magasabb rendű deriváltak

4.7. Definíció. Ha az $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ függvény deriválható x_0 egy környezetében, és az f' függvény deriválható x_0 -ban, akkor ez az eredeti függvény **második deriváltja**:

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Hasonlóképpen értelmezzük a magasabb rendű deriváltakat is. Az n -ed rendű deriváltat így jelöljük: $f^{(n)}(x)$.

Példa. $f(x) = e^x$ függvény deriváltja, $x_0 \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor

$$\frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0},$$

ezért

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

Ez utóbbi határértéket számoljuk ki:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - 1}{\ln t} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1 + y)},$$

ahol a $t = e^h$ és $y = t - 1$ helyettesítéseket végeztük el. Ennek reciproka

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + y)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \ln(1 + y)^{\frac{1}{y}} = \ln \left(\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} \right) = \ln e = 1.$$

Ezért $(e^x)' = e^x$, a függvény deriváltja önmaga, sőt $(e^x)^{(n)} = e^x$ minden $n > 1$ esetén is.

Hiperbolikus függvények deriváltja

A *sinus hiperbolikus* függvény $\operatorname{sh}(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Deriváltja:

$$\operatorname{sh}'(x) = \frac{e^x - (e^{-x})(-1)}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch}(x).$$

A *cosinus hiperbolikus* függvény $\operatorname{ch}(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Deriváltja:

$$\operatorname{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh}(x).$$

Ezek a függvények erősen emlékeztetnek a trigonometrikus függvényekre, hiszen

$$\operatorname{sh}'(x) = \operatorname{ch}(x), \quad \operatorname{ch}'(x) = \operatorname{sh}(x).$$

4.3. Inverz függvény deriváltja

4.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy f szigorúan monoton, differenciálható függvény, melyre $f'(x) \neq 0$, $x \in D_f$ mellett. Ekkor f^{-1} is differenciálható, és*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Másik felírás, ahol az $f(x) = y$ jelölést használjuk:

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

.

Bizonyítás. (Vázlat) A differenciálhatóságot bizonyítás nélkül elfogadjuk. Induljunk ki az

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

azonosságból, és deriváljuk az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva. Ekkor

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1,$$

ahonnan a tétel állítása következik.

Példa. Láttuk, hogy az $f(x) = e^x$ függvény deriváltja önmaga, $f'(x) = e^x$. Az inverz függvénye $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Ennek deriváltja

$$\ln'(x) = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Példa. (Általános exponenciális függvény). Legyen $a > 0$, $f(x) = a^x$. Mivel

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a},$$

ezért $f(x) = e^{x \ln a}$ és így

$$f'(x) = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

Az inverze

$$f^{-1}(x) = \log_a x, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

4.3.1. Trigonometrikus inverz-függvények deriváltja

1. $f(x) = \sin(x)$

Az inverz függvény $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. A derivált $x \in (-1, 1)$ esetén:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

mivel $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, és így $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$.

2. $f(x) = \cos(x)$.

Az inverze $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$. A deriváltja $x \in (-1, 1)$ esetén:

$$\arccos'(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

3. $f(x) = \operatorname{tg}(x)$.

$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. A tg függvény deriváltja $\operatorname{tg}'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2(x)$, ezért az inverz függvényre

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

4. $f(x) = \operatorname{ctg}(x)$.

Az inverz függvény $\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$. Az eredeti függvény deriváltja:

$$\operatorname{ctg}'(x) = -1 - \operatorname{ctg}^2(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}.$$

Az inverz függvény deriváltja

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{-1 - \operatorname{ctg}^2(\operatorname{arcctg}(x))} = \frac{-1}{1 + x^2}.$$

4.4. Differenciálszámítás alkalmazásai

4.4.1. Lokális szélsőérték

4.8. Definíció. f tetszőleges valós függvény, $x_0 \in D_f$. Ez az x_0 **lokális maximuma** f -nek, ha létezik egy U környezete x_0 -nak, melyre:

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in U \cap D_f.$$

x_0 **lokális minimuma** f -nek, ha létezik egy U környezete x_0 -nak, melyre:

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in U \cap D_f.$$

A lokális minimum és maximum közös neve **lokális szélsőérték**.

4.9. Definíció. x_0 *globális maximum*, ha $\forall x \in D_f$ esetén

$$f(x) \leq f(x_0).$$

x_0 *globális minimum*, ha $\forall x \in D_f$ esetén

$$f(x) \geq f(x_0).$$

4.3. Tétel. (Szükséges feltétel lokális szélsőértékre) Legyen $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{int}(D_f)$ belső pont. Tegyük fel, hogy f -nek x_0 -ban lokális szélsőértéke van és x_0 -ban differenciálható. Ekkor

$$f'(x_0) = 0.$$

Bizonyítás. (Lokális maximum esetén) A derivált definíciója szerint

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

A lokális maximum tulajdonsága miatt $\exists \varepsilon > 0$, hogy ha $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, akkor $f(x) \leq f(x_0)$. Így $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ esetén $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, ezért

$$f'(x_0) \geq 0. \quad (4.1)$$

Hasonlóan, ha $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$, akkor $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, ezért

$$f'(x_0) \leq 0. \quad (4.2)$$

(4.1)-t és (4.2)-t összevetve $f'(x_0) = 0$.

Megjegyzés. A tétel megfordítása nem igaz. Ha például $f(x) = x^3$, akkor $x_0 = 0$ nem lokális szélsőérték. Mégis, deriváltja $f'(x) = 3x^2$, és $f'(0) = 0$.

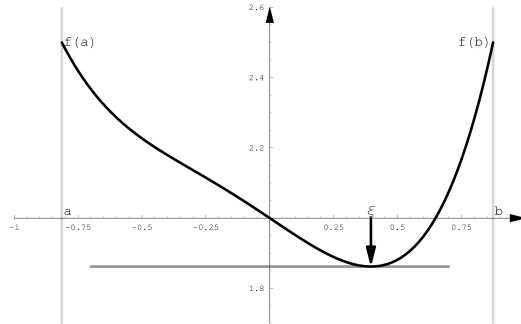
Definíció. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Azokat az $x_0 \in D$ pontokat, melyekre $f'(x_0) = 0$, *stacionárius pontnak* nevezzük.

4.4.2. Középérték tételek

4.4. Tétel. (Rolle tétel) Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy f

1. folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n,
2. $f(a) = f(b)$.

Ekkor létezik $\xi \in (a, b)$, melyre $f'(\xi) = 0$.



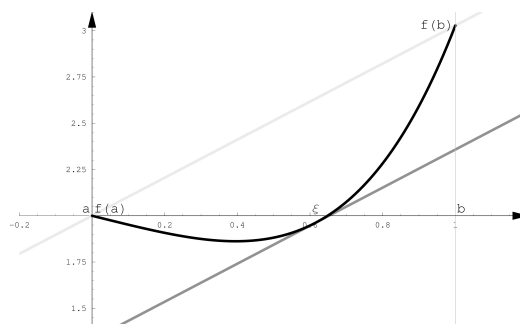
4.4. ábra. A Rolle tétel geometriai jelentése.

Bizonyítás. Mivel az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, ezért Weierstrass II. tétele miatt létezik maximuma (M) és minimuma (m). Ha $M = m = f(a) = f(b)$, akkor a függvény konstans, és triviálisan igaz a Tétel állítása.

Ha $m < M$, akkor van olyan $\xi \in (a, b)$ belső pont, melyre $m = f(\xi)$ vagy $M = f(\xi)$. Ebben a ξ pontban lokális szélsőérték van. Ekkor az előző tétel miatt $f'(\xi) = 0$.

4.5. Tétel. (Lagrange-féle középérték tétel) Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy f

- folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n.



4.5. ábra. A Lagrange tétel geometriai jelentése.

Ekkor létezik olyan $\xi \in (a, b)$, melyre: $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Bizonyítás* Az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokat összekötő egyenes egyenlete

$$h(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Legyen

$$g(x) := f(x) - h(x).$$

Ekkor g differenciálható, és

$$g(a) = f(a) - h(a) = 0, \quad g(b) = f(b) - h(b) = 0.$$

A Rolle tételt alkalmazva g -re megkapjuk, hogy $\exists \xi \in (a, b)$, melyre $g'(\xi) = 0$, azaz

$$f'(\xi) = h'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

4.6. Tétel. (Cauchy-féle középérték tétel) Legyenek $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvények. Tegyük fel, hogy $g(b) \neq g(a)$, és $g'(x) \neq 0$ minden $x \in (a, b)$ esetén. Ekkor létezik $\xi \in (a, b)$, melyre

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Megjegyzés. A Cauchy-féle középérték tétel speciális eseteként $g(x) = x$ választással a Lagrange tételt kapjuk.

4.7. Tétel. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy $f'(x) = 0$ minden $x \in (a, b)$ esetén. Ekkor $f(x) \equiv c$ valamilyen c -re.

Megjegyzés. Eddig a fenti állítás fordítottját láttuk: ha $f(x) \equiv c$ minden $x \in (a, b)$ -re, akkor $f'(x) \equiv 0$. Most azt látjuk majd be, hogy csak a konstans függvény deriváltja lehet azonosan 0.

Bizonyítás. Legyenek $x_1, x_2 \in [a, b]$ és $x_1 < x_2$. Tekintsük f megszorítását az $[x_1, x_2]$ intervallumra. A 4.5 **Tétel** alapján $\exists \xi \in (x_1, x_2)$, melyre:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

Mivel $f'(\xi) = 0$ (hiszen a derivált mindenütt 0), ezért

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \implies f(x_2) = f(x_1).$$

4.1. Következmény. (*Integrálszámítás I. alaptétele*) Legyen $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ olyan differenciálható függvények, melyekre $f'(x) = g'(x)$ teljesül minden $x \in (a, b)$ -re. Ekkor $\exists c \in \mathbb{R}$, melyre

$$f(x) = g(x) + c, \quad \forall x \in (a, b).$$

A derivált kiszámításához határérték meghatározása kellett. Most fordított eset lesz: *kritikus határérték* meghatározásához deriválást használunk majd.

4.8. Tétel. (*L'Hopital szabály*) Legyenek f és g differenciálhatóak x_0 egy környezetében. Tegyük fel, hogy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

Ekkor, ha létezik az alábbi határérték:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A,$$

akkor

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Itt $A = \pm\infty$ és/vagy $x_0 = \pm\infty$ is lehet.

Bizonyítás* (Vázlat) Azt az esetet tekintjük, amikor $x_0 \in \mathbb{R}$. Mivel

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)},$$

ezért használjuk a Cauchy-féle középérték tételt az $[x_0, x]$ (ill. az $[x, x_0]$) intervallumon. Eszerint létezik ξ az x és x_0 pontok között, melyre

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Megjegyzés. A $\frac{\infty}{\infty}$ típusú határértékre is igaz a L'Hopital szabály.

1. *Példa.* A már ismert határértéket újra kiszámolhatjuk:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

2. *Példa.* $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1} = \infty.$

Megjegyzés. A L'Hopital szabály ismételhető, ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g'(x)$ továbbra is kritikus határértéket adna hányadosként.

3. *Példa.*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

4.4.3. Monoton függvények jellemzése

4.9. Tétel. *(Monoton függvények jellemzése) Legyen f egy I intervallumon értelmezett differenciálható függvény. Ekkor*

1. f monoton növekvő I -ben $\iff f'(x) \geq 0, \forall x \in I$.
2. f monoton fogyó I -ben $\iff f'(x) \leq 0, \forall x \in I$.

Bizonyítás. A két állítás ekvivalens. Legyen például f monoton növekvő az I intervallumban. Vizsgáljuk meg a differenciahányados előjelét x_0 környezetében. Ha $x < x_0$, akkor az

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

tört nevezője negatív, számlálója negatív vagy 0, ezért a tört nemnegatív. Ha $x > x_0$, akkor ugyanennek a törtnek számlálója nemnegatív és nevezője pozitív, ezért a tört most is nemnegatív.

Emiatt a határértékre $f'(x_0) \geq 0$ lesz.

4.2. Következmény. *Ha $f'(x) > 0 \forall x \in (a, b)$, akkor a függvény szigorúan monoton növekvő az (a, b) intervallumban.*

Megfordítva, szigorúan monoton növekvő függvény esetén nem feltétlenül igaz, hogy $f'(x) > 0$ teljesül $\forall x$ esetén. Például $f(x) = x^3$ mindenütt szigorúan monoton növekvő, mégis $f'(0) = 0$.

4.10. Tétel. *(Elégséges feltétel lokális szélsőértékre) Tegyük fel, hogy az f függvény x_0 -ban kétszer folytonosan differenciálható, és $f'(x_0) = 0$ (stacionárius pont). Akkor $f''(x_0) \neq 0$ esetén x_0 -ban lokális szélsőérték van. Sőt,*

1. ha $f''(x_0) > 0$, akkor x_0 lokális minimum,

2. ha $f''(x_0) < 0$, akkor x_0 lokális maximum,

Ha $f''(x_0) = 0$, akkor ebből még nem eldönthető, vajon x_0 -ban szélsőértéke van-e a függvénynek.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f''(x_0) > 0$. Ekkor $f''(x) > 0$ az x_0 valamely környezetében is, ezért $f'(x)$ szigorúan monoton növekedő ebben a környezetben. Mivel $f'(x_0) = 0$, ezért $x < x_0$ esetén $f'(x) < 0$, tehát a függvény itt szigorúan monoton fogy. Hasonlóan $x > x_0$ esetén $f'(x) > 0$, ezért f itt szigorúan monoton növekedő.

	$x < x_0$	x_0	$x > x_0$
f''	+	+	+
f'	–	0	+
f	$\searrow$	lok. minimum	$\nearrow$

4.4.4. Konvex és konkáv függvények

4.10. Definíció. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **konvex**, ha minden $x_1 < x_2 \in [a, b]$ esetén

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2), \quad t \in [0, 1].$$

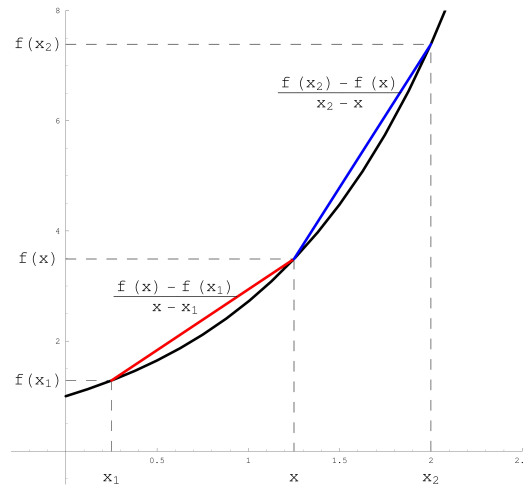
A függvény konkáv az I intervallumban, ha $-f$ konvex.

Szemléletesen, ha a függvény gráfjának bármely két pontját összekötő egyenes a gráf fölött van, akkor a függvény konvex.

4.11. Definíció. Az $x_0 \in D_f$ inflexiós pont, ha ebben a pontban a függvény konvexből vált konkávba, vagy konkávból konvexbe vált át.

4.11. Tétel. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ekkor:

1. f konvex $[a, b]$ -n $\iff f'$ monoton növekvő,



4.6. ábra. Konvex függvény deriváltjának monotonitása.

2. f konkáv $[a, b]$ -n $\iff f'$ monoton csökkenő.

Differenciálható függvény esetén az érintő egyenes helyzetéből megállapítható a konvexitás.

1. Ha a függvény gráfja mindenütt az érintő egyenes fölött van, akkor a függvény konvex.
2. Ha a függvény gráfja mindenütt az érintő egyenes alatt van, akkor a függvény konkáv.
3. Szemléletesen az inflexiós pontban a függvény érintője "átdöfi" a függvény grafikonját.

Példa. Tekintsük az $f(x) = x^3$ függvényt. Ekkor az $x = 0$ -ban az érintő egyenes $y = 0$, ami átdöfi a gráfot. A függvény konvex, ha $x \geq 0$, és konkáv, ha $x \leq 0$, az $x = 0$ pontban inflexiója van.

4.12. Tétel. Tegyük fel, hogy az f függvény x_0 egy környezetében kétszer folytonosan differenciálható. Ekkor

1. $f''(x_0) \geq 0$ esetén f konvex x_0 környezetében,
2. $f''(x_0) \leq 0$ esetén f konkáv x_0 környezetében.

4.3. Következmény. *Ha f kétszer folytonosan differenciálható x_0 egy környezetében és x_0 -ban inflexiós pontja van, akkor $f''(x_0) = 0$.*

4.3. Állítás. *Legyen f kétszer folytonosan differenciálható x_0 egy környezetében. Tegyük fel, hogy $f''(x_0) = 0$.*

1. *Ha f'' előjelet vált x_0 -ban, akkor x_0 inflexiós pont.*
2. *Tegyük fel, hogy f háromszor deriválható, és $f'''(x_0) \neq 0$. Ekkor x_0 inflexiós pont.*

5. fejezet

Integrálszámítás

5.1. Határozatlan integrál

5.1.1. Primitív függvény és határozatlan integrál

Határozatlan integrál meghatározása primitív függvény keresését jelenti. Ennek során a differenciálás operátornak (melyre $f \mapsto f'$), az inverzét keressük.

5.1. Definíció. Adott egy $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, ahol $I \subset \mathbb{R}$ intervallum. A $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény a f függvény **primitív függvénye**, ha

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

Példa. Legyen $f(x) = \sin(x) \cos(x)$. Mi a primitív függvénye? Felhasználjuk, hogy $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$, és ezért $f(x) = \sin(2x)/2$. Ebből

$$F(x) = -\frac{\cos(2x)}{4}.$$

De egy másik primitív függvényt is felírhatunk, hiszen $f(x) = \sin(x) \sin'(x)$,

$$G(x) = \frac{\sin^2(x)}{2}.$$

Nilván $F'(x) = G'(x) = f(x)$. Látható, hogy a primitív függvény - ha létezik - akkor nem egyértelmű.

5.1. Tétel. Ha az f függvény két primitív függvénye $F(x)$ és $G(x)$, akkor létezik egy $c \in \mathbb{R}$ konstans, melyre

$$F(x) = G(x) + c \quad \text{minden } x \in I\text{-re.}$$

Bizonyítás. Ez az Integrálszámítás I. alaptétele, ld. 4.1 Tétel.

Megjegyzés. Van olyan függvény, melynek nincs primitív függvénye. (Ki tud ilyent?)

5.2. Definíció. *ha Adott $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény primitív függvényeinek halmazát **határozatlan integrálnak** nevezzük, és így jelöljük:*

$$\int f(x)dx = \{H : I \rightarrow \mathbb{R} \mid H'(x) = f(x)\} = \{F + c : c \in \mathbb{R}\},$$

ahol $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges rögzített primitív függvény.

Példa. Legyen $f(x) = x$. Ekkor

$$\int f(x)dx = \frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Megjegyzés. A fenti határozatlan integrált csak intervallumon értelmezett függvényekre definiáljuk. Például

$$\int \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \ln(x) + c & \text{ha } I \subset (0, \infty), \\ \ln(-x) + c & \text{ha } I \subset (-\infty, 0). \end{cases}$$

Bizonyos esetekben – ha az intervallumról nem rögzítjük konkrétan, hogy a $(-\infty, 0)$ vagy a $(0, \infty)$ része, – használjuk az alábbi *jelölést*:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c. \quad (5.1)$$

Alaptulajdonságok

5.1. Állítás. *A határozatlan integrálnak az alábbi tulajdonságai vannak:*

1. $\int (f + g)(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$
2. $\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx.$
3. $\int f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = f(\varphi(x)) + c.$

Bizonyítás.

1. Triviális.
2. Triviális
3. Láncszabályt alkalmazva azt kapjuk, hogy $(f(\varphi(x)))' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$.

A 3. tulajdonságnak néhány speciális esetét tekintjük.

3/a. Mivel $(f^\alpha(x))' = \alpha \cdot f^{\alpha-1}(x) \cdot f'(x)$, ezért

$$\int f^\alpha(x) \cdot f'(x) dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1.$$

3/b. Az $\alpha = -1$ esetben:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c.$$

Itt az abszolút érték csak *jelölés*, ahogy korábban a (5.1) egyenletben már szerepelt.

3/c. Mivel $(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$, ezért

$$\int e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = e^{f(x)} + c.$$

1. *Példa.*

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx = \frac{\sin^2(x)}{2} + c.$$

Itt $f(x) = \sin(x)$, $f'(x) = \cos(x)$, $\alpha = 1$.

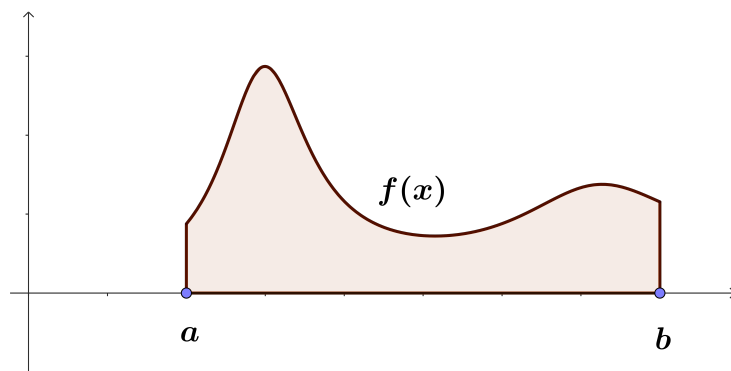
2. *Példa.*

$$\int (1 + e^x)^5 \cdot e^x dx = \frac{(1 + e^x)^6}{6} + c.$$

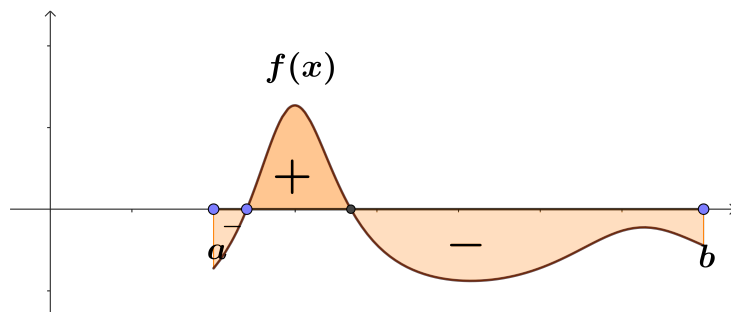
5.2. Riemann integrál

5.2.1. Riemann integrál, mint terület

A Riemann integrál szemléletes jelentése *nemnegatív* függvények esetén a függvény grafikonja és az x tengely közti terület mértéke.



Általános esetben "előjeles" területet jelent majd az integrál: az x tengely alatti terület negatív előjelet kap.



A függvény gráfja és az x tengely közötti területet egyelőre közelítjük. Függőleges téglalapokat írunk be, melyek területe ismert.

5.3. Definíció. Az $[a, b]$ intervallum egy **felosztása** néhány osztópontot jelent. Nevezetesen:

$$\mathcal{F} = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\}.$$

A felosztás **finomsága** a leghosszabb részintervallum hossza:

$$\delta(\mathcal{F}) = \max\{x_k - x_{k-1} : k = 1, \dots, n\}.$$

Legyen $\mathcal{F}$ egy rögzített felosztása az $[a, b]$ intervallumnak. A felosztás k -dik részintervallumát jelölje

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}.$$

A szemléletesség miatt most feltesszük hogy a függvény nemnegatív. Adott egy $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ korlátos függvény.

5.4. Definíció. Az $\mathcal{F}$ felosztáshoz tartozó **alsó közelítő összeg** $s(\mathcal{F})$:

$$s(\mathcal{F}) := \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n m_k \cdot \Delta x_k \text{ itt } m_k = \inf \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Az $\mathcal{F}$ felosztáshoz tartozó **felső közelítő összeg** $S(\mathcal{F})$:

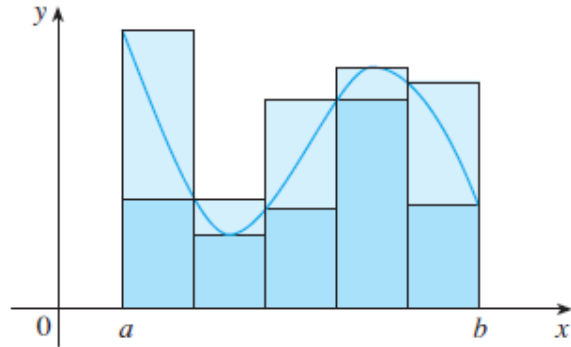
$$S(\mathcal{F}) := \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n M_k \cdot \Delta x_k \text{ itt } M_k = \sup \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Az alsó közelítő összeg azoknak a téglalapoknak az össz-területét adják meg, amik még "épp beférnek" a függvény gráfja alá. A téglalapok alapjának hosszát a felosztás osztópontjai adják meg.

A felső közelítő összeg azoknak a téglalapoknak az össz-területét adja meg, amelyek felülről "épp érintik" a függvény gráfját. Itt is a téglalapok alapjának hosszát a felosztás osztópontjai adják meg.

A következő ábrán egy konkrét felosztáshoz tartozó alsó- és felső felosztások láthatóak:

Ezek a közelítő összegek eleget tesznek az alábbi tulajdonságoknak:



5.1. ábra. A függvény alatti terület alsó és felső közelítése.

5.2. Állítás. 1. Tetszőleges $\mathcal{F}$ felosztás esetén

$$s(\mathcal{F}) \leq S(\mathcal{F}).$$

2. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F}'$ felosztás annyiban különbözik az $\mathcal{F}$ felosztástól, hogy egyetlen új osztópontot veszünk hozzá. Ekkor

$$s(\mathcal{F}) \leq s(\mathcal{F}') \leq S(\mathcal{F}') \leq S(\mathcal{F}).$$

3. Tetszőleges $\mathcal{F}$ és $\mathcal{F}'$ felosztáspárra

$$s(\mathcal{F}) \leq S(\mathcal{F}').$$

Bizonyítás*

1. Triviális.
2. Belátjuk például az alsó közelítő összegekre vonatkozó összefüggést. Tegyük fel, hogy az új x^* osztópont a k -dik részintervallumban van:

$$x_{k-1} < x^* < x_k.$$

A két részintervallumon a függvény infimumát jelölje m_{k1} ill. m_{k2} . Ekkor

$$\begin{aligned} s(\mathcal{F}') - s(\mathcal{F}) &= m_{k1}(x^* - x_{k-1}) + m_{k2}(x_k - x^*) - m_k(x_k - x_{k-1}) = \\ &= (m_{k1} - m_k)(x^* - x_{k-1}) + (m_{k2} - m_k)(x_k - x^*) \geq 0, \end{aligned}$$

hiszen az intervallum szűkítésével az infimum értéke csak nőhet.

3. Az $\mathcal{F}$ és $\mathcal{F}'$ felosztások oszópontjainak egyesítésével kapott felosztást jelölje $\mathcal{F}_0$. Ekkor az 1. és 2. pont szerint

$$s(\mathcal{F}) \leq s(\mathcal{F}_0) \leq S(\mathcal{F}_0) \leq S(\mathcal{F}').$$

Az összes lehetséges felosztások halmazát jelölje $\mathbb{F}$. Legyenek

$$s := \sup\{s(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \in \mathbb{F}\}, \quad S := \inf\{S(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \in \mathbb{F}\}.$$

A fenti 5.2. Állítás következtében $s \leq S$.

5.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény **Riemann-integrálható** az $[a, b]$ intervallumon, ha

$$\sup\{s(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \in \mathbb{F}\} = \inf\{S(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \in \mathbb{F}\}.$$

Ekkor a függvény **Riemann integrálja** $[a, b]$ -n a fenti érték, ezt így jelöljük:

$$\int_a^b f(x)dx = s = S.$$

Ebben az esetben röviden csak azt fogjuk mondani, hogy f **integrálható**.

Példa. Ha $f(x) \equiv c$ konstans függvény, akkor integrálható. Az integrál

$$\int_a^b f(x)dx = c \cdot (b - a).$$

Példa. Nem integrálható, korlátos függvény a Dirichlet függvény. Ezt így definiáltunk:

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{és} \quad f(x) := \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{ha } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ez nem integrálható, hiszen tetszőleges $\mathcal{F}$ felosztás esetén

$$s(\mathcal{F}) = 0, \quad S(\mathcal{F}) = 1.$$

5.6. Definíció. Az $\mathcal{F}$ felosztáshoz tartozó **oszcillációs összeg**

$$o(\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k.$$

A felosztáshoz tartozó egyik **Riemann összeg**

$$\sigma(\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k,$$

ahol $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tetszőleges pont az intervallumban.

Megjegyzés. Figyeljünk arra, hogy itt két különböző betű szerepel; o (kis o) az oszcillációs összeg jelölésére, és σ (szigma) a Riemann összeg jelölésére. Ezekre a mennyiségekre minden felosztás esetén teljesülnek az alábbi összefüggések:

$$s(\mathcal{F}) \leq \sigma(\mathcal{F}) \leq S(\mathcal{F}), \quad o(\mathcal{F}) \geq 0.$$

Megjegyzés. Mivel minden $\mathcal{F}$ és $\mathcal{F}'$ felosztáspárra

$$s(\mathcal{F}) \leq S(\mathcal{F}'),$$

ezért az integrálhatósághoz elegendő belátni, hogy létezik olyan $(\mathcal{F}_n)$ felosztás sorozat, melyre $\delta(\mathcal{F}_n) \rightarrow 0$ és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(\mathcal{F}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(\mathcal{F}_n),$$

azaz $\lim_{n \rightarrow \infty} o(\mathcal{F}_n) = 0$.

Ezzel beláttuk a következő tételt:

5.2. Tétel. *Ha f integrálható, akkor minden olyan $(\mathcal{F}_n)$ felosztás sorozatra, melyre $\delta(\mathcal{F}_n) \rightarrow 0$:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(\mathcal{F}_n) = \int_a^b f(x) dx.$$

Más szóval: ha f integrálható függvény, akkor minden felosztássorozat mentén - melynek finomsága 0-hoz tart - a Riemann-összegek határértéke mindig a Riemann integrál értéke.

5.3. Tétel. *(Előző Tétel megfordítása) Tegyük fel, hogy létezik olyan $(\mathcal{F}_n)$ felosztás sorozat, amire $\delta(\mathcal{F}_n) \rightarrow 0$ és*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(\mathcal{F}_n) = \mathcal{I},$$

ahol a határérték független a ξ_k pontok választásától. Akkor f integrálható.

Elegendő feltételek integrálhatóságra*

(Kiegészítő tananyag)

Ebben a fejezetben néhány olyan kritériumot fogalmazunk meg, amelyek *elegendők* az integrálhatósághoz. A bizonyítások alapja ez a lemma lesz:

5.1. Lemma. *Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor az integrálhatóság azzal ekvivalens, hogy $\forall \varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $\mathcal{F}$ felosztás, melyre*

$$o(\mathcal{F}) < \varepsilon,$$

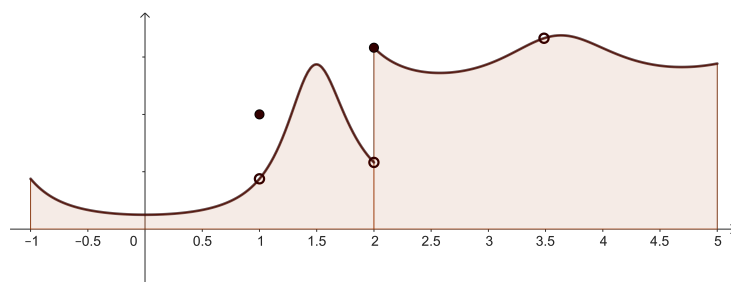
tehát az oszcillációs összeg tetszőlegesen kicsi lehet.

A következő Tételek bizonyítása azon alapul, hogy a 5.1 **Lemma** feltételét igazoljuk.

5.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos és **monoton**. Ekkor f integrálható.*

5.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **folytonos** függvény. Ekkor f integrálható.*

5.6. Tétel. *Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos, mely **véges sok szakadási** helytől eltekintve folytonos. Ekkor f integrálható.*



5.2. ábra. Szakadósos függvény integrálja

5.2.2. Az integrál kiszámítása

A Riemann integrál közelítő összegek határértékének meghatározását jelentette. A gyakorlatban ezt nem használható az integrál értékének kiszámítására. Ebben a fejezetben "összeér" a határozatlan és határozatlan integrál, ezzel tudjuk a Riemann integrál értékét kiszámolni.

A következő Tétel az integrálszámítás egyik legfontosabb alappillére.

5.7. Tétel. *(Newton-Leibniz formula) Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható függvény. Tegyük fel, hogy létezik F primitív függvénye f -nek, azaz van olyan $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény, melyre*

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a, b).$$

Ekkor

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Bizonyítás* Tekintsünk egy tetszőleges felosztást:

$$\mathcal{F} = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}.$$

Vizsgáljuk F megszorítását egy részintervallumon, $F : [x_{k-1}, x_k] \rightarrow \mathbb{R}$. Mivel F differenciálható, ezért a Lagrange-féle középérték tétel alkalmazható. Eszerint létezik olyan $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$, melyre

$$F'(\xi_k) = \frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f(\xi_k). \quad (5.2)$$

Az $\int_a^b f(x)dx$ integrál közelítésére Riemann összeget alkalmazunk ezekkel a ξ_k -kal, és felhasználjuk a fenti (5.2) összefüggést:

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{F}) &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x_k - x_{k-1}) = \\ &= \sum_{k=1}^n (F(x_k) - F(x_{k-1})) = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a). \end{aligned}$$

Tekintsünk most egy felosztás sorozatot: $(\mathcal{F}_n)$, melyre $\delta(\mathcal{F}_n) \rightarrow 0$. A fenti konstrukcióval választva a Riemann-összeg alappontjait, azt kapjuk, hogy

$$\sigma(\mathcal{F}_n) = F(b) - F(a) \quad \forall n.$$

adódik. Mivel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(\mathcal{F}_n) = \int_a^b f(x)dx,$$

ezzel a tételt beláttuk. □

A fenti tételhez kapcsolódóan az alábbi jelölést fogjuk használni:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = \left[F(x) \right]_a^b.$$

Felmerülhet az a kérdés, hogy a Newton-Leibniz-formulában melyik primitív függvényt válasszuk? Legyenek F és G primitív függvényei f -nek. Ekkor tudjuk, hogy

$$F(x) = G(x) + c \quad \forall x$$

valamely c konstanssal. Így

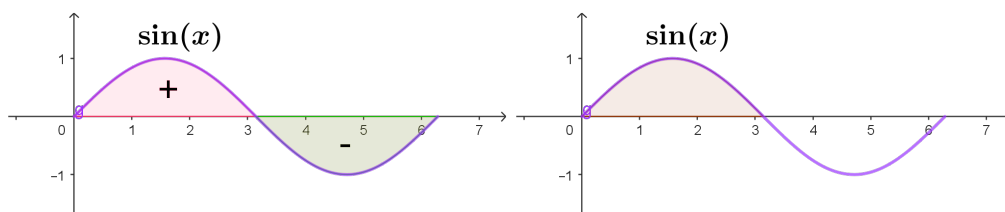
$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a),$$

tehát bármelyik primitív függvényt választhatjuk.

Példa. Az $f(x) = \sin(x)$ egyik primitív függvénye $F(x) = -\cos(x)$, ezért

$$\int_0^{2\pi} \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(0) = -1 + 1 = 0,$$

$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx = -\cos(x) \Big|_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2.$$



5.7. Definíció. Ha $b > a$, akkor legyen

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Ezért

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

A definícióból azonnal következik az alábbi állítás.

5.3. Állítás. *A határozott integrál tulajdonságai:*

1. Tegyük fel, hogy $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható és $f : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}$ is integrálható, akkor $f : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}$ is integrálható, és:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

2. Ha $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrálhatóak, akkor $(f + g)$ is integrálható, és

$$\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

3. Ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható, akkor $cf : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ is integrálható és

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

4. Ha f és g két integrálható függvény, melyekre $f(x) \leq g(x)$ teljesül minden $x \in [a, b]$ pontban, akkor

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

5. Ha f integrálható, akkor $|f|$ is integrálható, és

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Bizonyítás.

1.-4. triviális következménye a definíciónak.

5. A 4. tulajdonságból következik, felhasználva azt az összefüggést, hogy

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|.$$

Megjegyzés. Az 5. tulajdonság megfordítása nem feltétlenül igaz. Ha $|f|$ integrálható, abból még nem következik, hogy f is integrálható. Erre példa: legyen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ az alábbi függvény:

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in \mathbb{Q}, \\ -1 & \text{ha } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ekkor f nem integrálható, pedig $|f| \equiv 1$, integrálható.

Bevezetjük az alábbi jelölést:

$$\mathcal{R}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ integrálható}\}.$$

Nyilván $\mathcal{R}[a, b]$ lineáris tér, azaz vektortér.

5.2.3. Integrálközép

Emlékeztetünk arra, hogy az $a_1, \dots, a_n$ valós számok számtani közepét úgy definiáltuk, mint

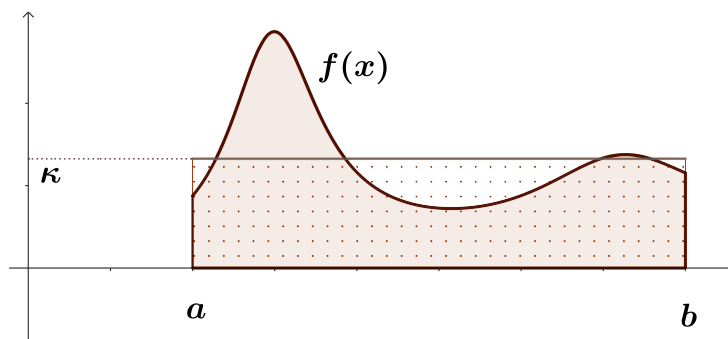
$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}.$$

Ennek általánosításaként természetes módon adódik az integrálokra vonatkozó *integrálközép*:

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b 1 dx}.$$

5.8. Definíció. Az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható függvény *integrálközepe* az alábbi κ (kappa) szám:

$$\kappa := \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}.$$



5.3. ábra. Integrálközep szemléletesen

5.4. Állítás. Tegyük fel, hogy az f integrálható függvényre teljesül, hogy

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b].$$

Ekkor az integrálközépre is fennáll:

$$m \leq \kappa \leq M.$$

5.8. Tétel. (Integrál középérték tétel) Tegyük fel, hogy f folytonos $[a, b]$ -n. Ekkor létezik olyan $\xi \in [a, b]$, melyre

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}.$$

Bizonyítás* Legyen a függvény minimuma m , maximuma M . Ekkor a Weierstrass II. tétel szerint léteznek $\xi_1, \xi_2 \in [a, b]$ számok, melyekre $f(\xi_1) = m$, $f(\xi_2) = M$. Mivel az előző állítás értelmében $m \leq \kappa \leq M$, ezért a tétel állítása a Bolzano tételből következik.

5.2.4. Parciális integrálás

Emlékeztetőül írjuk fel a szorzat függvény deriválásáról szóló képletet:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Mindkét oldal primitív függvényét véve megkapjuk az alábbi szabályt.

5.9. Tétel. *(Parciális integrálás)* Legyenek $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deriválható függvények. Ekkor

1. *(Határozatlan alak)*

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

2. *(Határozott alak)*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

1. *Példa.*

$$\int xe^x dx = ?$$

Alkalmazzuk a parciális integrálási szabályt a következő "szereposztással":

$$f'(x) = e^x, \quad g(x) = x.$$

Ekkor

$$f(x) = e^x, \quad g'(x) = 1,$$

tehát azt kapjuk, hogy

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = (x - 1)e^x + c.$$

Ugyanez az eljárást használjuk, ha a kiszámítandó integrál alakja:

$$\int \text{polinom} \cdot e^x dx.$$

2. *Példa.*

$$\int x \cos(x) dx = ?$$

Alkalmazzuk a parciális integrálási szabályt a következő szereposztással:

$$f'(x) = \cos(x), \quad g(x) = x.$$

Ekkor

$$f(x) = \sin(x), \quad g'(x) = 1.$$

Tehát azt kapjuk, hogy

$$\int x \cos(x) dx = x \sin(x) - \int \sin(x) dx = x \sin(x) + \cos(x) + c.$$

Hasonló típusú integrálok, amiket így számolunk:

$$\int \text{polinom} \cdot \begin{Bmatrix} \sin(x) \\ \cos(x) \\ \text{ch}(x) \\ \text{sh}(x) \end{Bmatrix} dx.$$

3. *Példa.*

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx = ?, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Alkalmazzuk a parciális integrálási szabályt a következő szereposztással:

$$f(x) = e^{ax}, \quad g'(x) = \sin(bx).$$

Ekkor

$$f'(x) = ae^{ax}, \quad g(x) = -\frac{\cos(bx)}{b},$$

tehát azt kapjuk, hogy

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos(bx) + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos(bx) dx = (**)$$

Itt újabb parciális integrálást végzünk:

$$(**) = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos(bx) + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin(bx) - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \sin(bx) dx.$$

Az egyenlet kiinduló alakját és végső alakját összehasonlítva az ismeretlen integrálra egy összefüggést kapunk, ahonnan

$$\int e^{ax} \sin(bx) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (-b \cos(bx) + a \sin(bx)) + c.$$

Teljesen hasonlóan számolható az alábbi integrál is:

$$\int e^{ax} \cos(bx) dx.$$

4. *Példa.*

$$\int \ln(x) dx = ?$$

Alkalmazzuk a parciális integrálási szabályt a következő szereposztással:

$$f(x) = \ln(x), \quad g'(x) = 1.$$

Ekkor

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = x,$$

tehát azt kapjuk, hogy

$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) + \int \frac{1}{x} x dx = x \ln(x) + \int 1 dx = x(\ln(x) + 1) + c.$$

Hasonlóan számolhatók az alábbi integrálok, ahol a szorzat második tényezőjének deriváltja egy polinom reciproka:

$$\int \text{polinom} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \ln(x) \\ \operatorname{arctg}(x) \\ \operatorname{arcctg}(x) \\ \dots \end{array} \right\} dx.$$

5.2.5. Helyettesítés integrálban

Emlékeztetőül felírjuk a *lányszabályt*, mely az összetett függvény deriválására vonatkozó képlet:

$$(f(\phi(t)))' = f'(\phi(t)) \phi'(t).$$

Ennek az összefüggésnek a megfelelője az integrálszámításban a **helyettesítés integrálban**.

5.10. Tétel. *Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható függvény. Legyen továbbá $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ szigorúan monoton, differenciálható függvény, melyre*

$$\phi(\alpha) = a, \quad \phi(\beta) = b.$$

(Az x változó helyére a $\phi(t)$ függvényt írjuk majd az integrálban.) Ekkor a helyettesítéssel integrál alapformulája:

1. *(Határozott alak)*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

2. *(Határozatlan alak)*

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int f(t)dt \Big|_{t=\phi(x)}.$$

Megjegyzés. Lényegében itt is a korábban említett formuláról van szó

$$\int f(x)dx = \int f(\phi)d\phi,$$

ahol $\phi = \phi(t)$ egy függvény. Formálisan könnyen megjegyezhető a fenti formula, és pedig a következőképpen:

$$\phi'(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} \quad \implies \quad "d\phi(t) = \phi'(t)dt" .$$

Példa. Számoljuk ki az alábbi integrált:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = ?$$

Végezzük el a következő helyettesítést:

$$x = \sin(t).$$

$$\text{Ekkor } x \in [0, 1] \iff t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Így a helyettesítés:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) dt = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2} dt = \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{\sin(2t)}{4} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

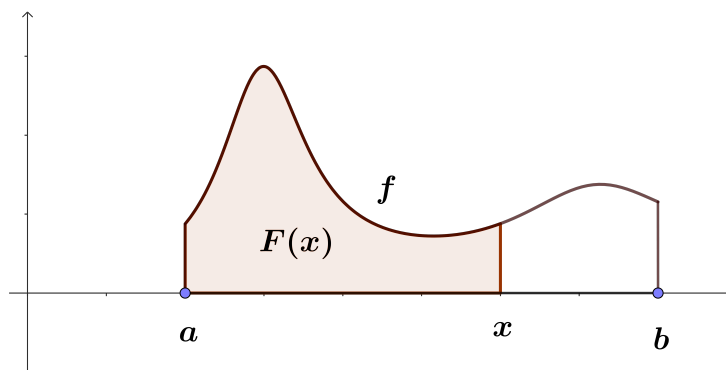
5.2.6. Integrálfüggvény

Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható függvény.

5.9. Definíció. Az f függvény *integrálfüggvényét* így definiáljuk:

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Az integrálási tartomány egyik végpontját rögzítjük, és a másik végpont lesz az integrálfüggvény változója.



5.4. ábra. Az integrálfüggvény szemléletesen

A következő tételre szokás úgy is hivatkozni, mint "*Az integrálszámítás II. alaptétele*"

5.11. Tétel. *Az integrálfüggvény rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:*

1. *F folytonos $[a, b]$ -n.*
2. *Ha f folytonos az $x_0 \in (a, b)$ pont egy környezetében, akkor x_0 -ban F differenciálható, és*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Példa. Az alábbi függvény zárt alakban nem írható fel:

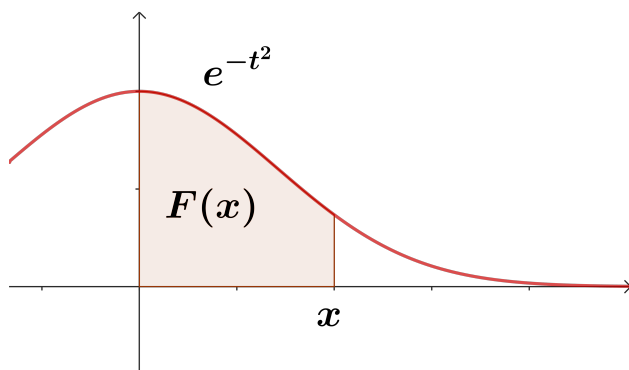
$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Mégis, ismerjük deriváltjait:

$$F'(x) = e^{-x^2}, \quad F''(x) = -2xe^{-x^2},$$

Ezek alapján a függvény viselkedéséről már sokat tudhatunk.

A következő fejezetben épp ilyen helyzettel találkozunk.

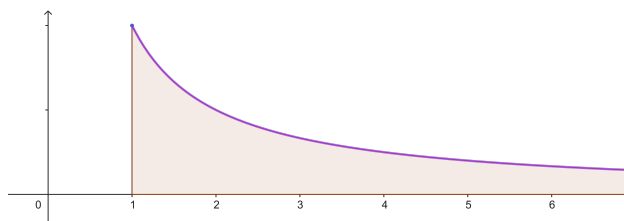
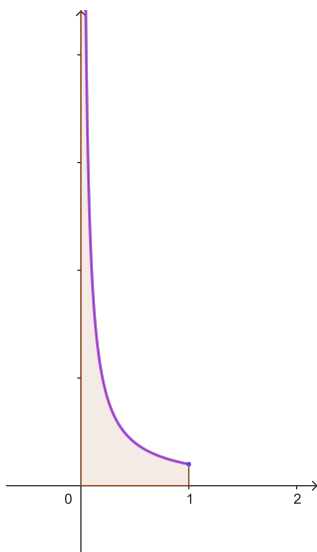


5.3. Impropius integrál

5.3.1. Az improprius integrál definíciója

Eddig olyan függvényekkel foglalkoztunk, melyek értelmezési tartománya korlátos intervallum, és értékészlete is korlátos.

Az integrálfogalmat kiterjesztjük arra az esetre, amikor ezek valamelyike nem teljesül.



Legyen $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ tetszőleges függvény, ahol esetleg $\alpha = -\infty$ és/vagy $\beta = \infty$ is előfordulhat. Bevezetjük az $I = (\alpha, \beta)$ jelölést.

5.10. Definíció. Az f függvény **lokálisan integrálható** I -ben, ha minden $[a, b] \subset I$ korlátos és zárt intervallum esetén $f|_{[a,b]}$ integrálható. Ezt a tulajdonságot így jelöljük:

$$f \in \mathcal{R}^{loc}(I).$$

Példa. Az

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, 1)$$

függvény lokálisan integrálható, bár nem korlátos az adott intervallumon.

Példa. Az

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x \in (1, \infty)$$

függvény lokálisan integrálható, bár nem korlátos az értelmezési tartomány.

Vezessük be ennek integrálfüggvényét:

$$F(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^t = 1 - \frac{1}{t} < 1 \quad \forall t > 1.$$

Mivel $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$, természetes módon definiálhatjuk az integrált $(1, \infty)$ tartományon:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = 1.$$

5.11. Definíció. Az $f \in \mathcal{R}^{loc}(I)$ függvény **improprius értelemben integrálható**, ha

$$\lim_{\substack{a \rightarrow \alpha+ \\ b \rightarrow \beta-}} \int_a^b f(x) dx =: \int_\alpha^\beta f(x) dx$$

határérték létezik és véges.

Megjegyzés. Ha $f \in \mathcal{R}[\alpha, \beta]$, akkor improprius értelemben is integrálható.

Ha f impropriusan integrálható $[a, \infty)$ -n, akkor elegendő az egyik határérték:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Megjegyzés. Az integrál eddigi tulajdonságai megmaradnak:

1. linearitás (összeg és skalárszoros integrálja)
2. monotonitás
3. Newton-Leibniz formula; ha a primitív függvény határértéke létezik.

Ha $I = (\alpha, \beta)$, ahol a végpontok nem feltétlenül végesek, használni fogjuk az alábbi jelölést is

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_I f(x)dx.$$

Példa.

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2}dx.$$

A véges intervallumon vett integrált ki tudjuk számolni a Newton-Leibniz formula alapján

$$\int_0^b \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x) \Big|_0^b = \arctan(b) - \arctan(0),$$

ezért

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan(b) = \frac{\pi}{2}.$$

Emiatt

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \pi.$$

5.3.2. Hatványfüggvény integrálja

Példa. Milyen $\alpha > 0$ esetén létezik az alábbi improprius integrál:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx?$$

A függvény nem korlátos 0 környezetében, de lokálisan integrálható $(0, 1)$ -ben. Az improprius integrál definíciója szerint - ha létezik - így számolható:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha} dx.$$

A primitív függvényt ismerjük:

$$\int \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \ln |x|, & \text{ha } \alpha = 1, \\ \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \text{ha } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Tehát $\alpha \neq 1$ esetén:

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_\varepsilon^1 = \frac{1 - \varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Ezért $\varepsilon \rightarrow 0+$ határátmenettel ezt kapjuk:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \frac{1 - \varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{ha } \alpha < 1, \\ \infty & \text{ha } \alpha > 1, \end{cases}$$

$\alpha = 1$ esetén

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_\varepsilon^1 = -\ln \varepsilon, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (-\ln \varepsilon) = \infty.$$

Összefoglalva:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} < \infty & \text{ha } \alpha < 1 \\ \infty & \text{ha } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Példa. Hasonlóképpen vizsgáljuk meg az

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$$

improprius integrált, $\alpha > 0$ esetén. Ekkor

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^{\alpha}} dx.$$

$\alpha \neq 1$ esetén:

$$\int_1^b \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_1^b = \frac{b^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha},$$

és ekkor

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = \begin{cases} \infty, & \text{ha } 1-\alpha > 0, \\ \frac{1}{\alpha-1}, & \text{ha } 1-\alpha < 0. \end{cases}$$

$\alpha = 1$ esetén:

$$\int_1^b \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^b = \ln b, \quad \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln b) = \infty.$$

Összefoglalva

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx = \begin{cases} \infty, & \text{ha } \alpha \leq 1, \\ < \infty, & \text{ha } \alpha > 1. \end{cases} \quad (5.3)$$

Megjegyzés. A fenti két példából következik, hogy minden $\alpha > 0$ értékre

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx$$

impropriusan nem integrálható.

5.3.3. Kritériumok improprius integrálokra

5.12. Tétel. 1. (Majoráns kritérium) Adottak az $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ lokálisan integrálható függvények. Tegyük fel, hogy

$$0 \leq |f(x)| \leq g(x), \quad x \in I.$$

Ekkor

$$\int_I g(x) dx < \infty \implies \int_I f(x) dx < \infty.$$

2. (Minoráns kritérium) Legyenek $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ adott függvények, ahol $I = (\alpha, \beta)$. Tegyük fel, hogy $f(x) \leq g(x)$ minden $x \in I$ -re. Ekkor

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \infty \implies \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx = \infty.$$

A majoráns kritériumot használjuk fel arra, hogy egy függvényt egy megfelelő hatványfüggvénnyel összehasonlítva igazoljuk az improprius integrál létezését.

5.13. Tétel. Legyen $a > 0$ és $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ lokálisan integrálható függvény. Tegyük fel, hogy valamilyen $\alpha > 1$ és $c \in \mathbb{R}^+$ mellett:

$$|f(x)| \leq c \cdot x^{-\alpha}, \quad \forall x \geq a.$$

Ekkor az $\int_a^{\infty} f(x) dx$ improprius integrál létezik.

Szokás a fenti nagyságrendre vonatkozó tulajdonságot így jelölni

$$f(x) \sim O\left(\frac{1}{x^{\alpha}}\right), \quad x \rightarrow \infty.$$

Példa. (Dirichlet integrál) Tekintsük az alábbi improprius integrált:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

Ezt két részre bontjuk

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx + \int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

Az $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ függvény $[0, 1]$ -re vett megszorítása folytonos, tehát az első integrál véges. A másik integrált becsülni fogjuk.

$$I_2 = \int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

Az $\int_1^b \frac{\sin(x)}{x} dx$ -t parciálisan integrálva:

$$\int_1^b \frac{\sin(x)}{x} dx = -\frac{\cos(x)}{x} \Big|_1^b - \int_1^b \frac{\cos(x)}{x^2} dx,$$

ahol a parciális integrálást így végeztük:

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2},$$

$$g'(x) = \sin(x) \quad \rightarrow \quad g(x) = -\cos(x).$$

Mivel

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{\cos(x)}{x} \Big|_1^b \right) = 0 + \cos(1),$$

és

$$0 \leq \left| \frac{\cos(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2},$$

használhatjuk a majoráns kritériumot, majoránsként

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx < \infty.$$

Tehát $I_2 < \infty$, a Dirichlet-integrál véges.

5. *Gyakorlat.* Belátható, hogy

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

(Nem könnyű, sőt!)

5.14. Tétel. *(Cauchy feltétel improprius integrálra) Legyen $I = (\alpha, \beta)$, ahol a végpontok esetleg nem végesek. Tekintsünk egy $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt. Ekkor*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$

integrál pontosan akkor konvergens, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz léteznek olyan $U(\alpha)$ és $U(\beta)$ környezetek α -nak és β -nak, melyekre

$$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in U(\alpha) : \left| \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x) dx \right| < \varepsilon,$$

$$\forall \beta_1, \beta_2 \in U(\beta) : \left| \int_{\beta_1}^{\beta_2} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

A fenti tétel egy fontos következménye $I = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ esetén az alábbi állítás:

5.1. Következmény. *Tegyük fel, hogy*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx < \infty.$$

Ekkor minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $K > 0$ szám, melyre

$$\left| \int_{-\infty}^{-K} f(x) dx + \int_K^{\infty} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Improprius integrálok esetén is végezhetünk helyettesítést, az ismert szabályok betartásával. A helyettesítés néha egyszerűsít, és az improprius integrálból közönséges integrál lesz.

Példa.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(t)}} \cdot \cos(t) dt = \int_0^{\pi/2} 1 dt = \frac{\pi}{2}.$$

Az $x = \sin(t)$ helyettesítést végeztük el, így $dx = \cos(t) dt$. Az integrálási határok $x = \sin(t) \in [0, 1]$ miatt $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ lett.

5.3.4. A Γ függvény**(Kiegészítő tananyag.)*

A $\Gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ (gamma) függvényt így definiáljuk:

$$\Gamma(t) := \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{t-1} dx, \quad t > 0.$$

Először belátjuk, hogy a fenti improprius integrál véges, azaz a Γ függvény jól definiált. Valóban, két részre bontva az integrálási tartományt,

$$\int_0^1 e^{-x} \cdot x^{t-1} dx < \infty.$$

Ez csak $0 < t < 1$ esetén nem triviális, de ekkor is $e^{-x} \cdot x^{t-1} < x^{-\alpha}$, ahol $0 < \alpha < 1$. Továbbá

$$\int_1^\infty e^{-x} \cdot x^{t-1} dx < \infty,$$

mert ebben az intervallumban $e^{-x} < x^{-k}$, tetszőleges $k > 0$ mellett. Parciálisan integrálva azt kapjuk, hogy

$$\int e^{-x} \cdot x^{t-1} dx = -e^{-x} \cdot x^{t-1} + \int e^{-x} \cdot (t-1)x^{t-2} dx,$$

ahol a parciális integrálásnál az alábbi függvényeket használtuk

$$f(x) = x^{t-1} \rightarrow f'(x) = (t-1)x^{t-2}$$

$$g'(x) = e^{-x} \rightarrow g(x) = -e^{-x}.$$

Így

$$\int_0^b e^{-x} \cdot x^{t-1} dx = -e^{-x} \cdot x^{t-1} \Big|_0^b + (t-1) \int_0^b x^{t-2} \cdot e^{-x} dx.$$

Ezért $b \rightarrow \infty$ határértéket véve:

$$\Gamma(t) = 0 + (t-1) \cdot \Gamma(t-1).$$

Ismételjük meg a számolást $\Gamma(t-1)$ -re:

$$\Gamma(t) = (t-1) \cdot \Gamma(t-1) = (t-1)(t-2)\Gamma(t-2).$$

Ha $t = n$ természetes szám, akkor eddig jutunk:

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2) \cdot \dots \Gamma(1) = (n-1)! \cdot \Gamma(1).$$

$\Gamma(1)$ -t könnyen kiszámolhatjuk:

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-e^{-x} \Big|_0^b \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} -e^{-b} - (-e)^0 = \lim_{b \rightarrow \infty} e^{-b} + 1 = 1.$$

Ezért ha $n \in \mathbb{N}$ természetes szám, akkor

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

A fenti Γ függvény segítségével definiálhatjuk a $t!$ faktoriálisan abban az esetben is, ha t nem feltétlenül természetes szám:

$$t! := \Gamma(t+1).$$

5.4. Integrálszámítás alkalmazásai

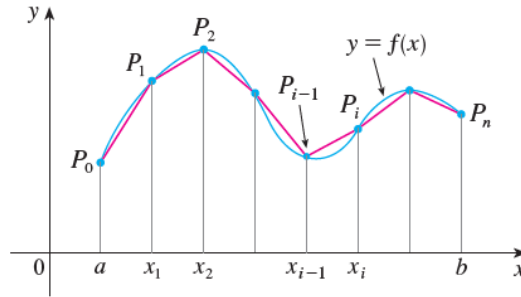
5.4.1. Függvény gráfjának ívhossza

5.12. Definíció. Adott $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ egy folytonos függvény. Ennek gráfja

$$L = \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Ennek a görbe vonalnak az ívhosszát határértékként fogjuk definiálni. Felteesszük, hogy a függvény "sima", azaz differenciálható. Tekintsük az $[a, b]$ intervallum egy felosztását

$$\mathcal{F}_n = \{a = v_0 < x_1 < \dots < x_n = b\},$$



5.5. ábra. A függvény ívhossz közelítése gráffal

ekkor a gráf görbe megfelelő pontjait jelölje $P_0, P_1 \dots P_n$

A k -adik ívdarab hosszát a Pithagorasz tétel alapján fogjuk közelíteni:

$$s_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$

Így az egész ívhossz egy közelítése

$$s(\mathcal{F}_n) = \sum_{k=1}^n s_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}.$$

Ennek határértékét tekintjük, amikor $n \rightarrow \infty$ és

$$\delta := \max(x_k - x_{k-1} : k = 1, \dots, n) \rightarrow 0.$$

Ez a közelítő összeg így is írható:

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{\Delta x_k} \right)^2} \cdot \Delta x_k$$

A Lagrange féle közéérték tétel alkalmazásával belátható az alábbi formula:

5.5. Állítás. Adott $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Ekkor a függvény grádjának hossza

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (5.4)$$

Példa. Számoljuk ki a láncgörbe egy darabjának hosszát.

$$f(x) = \operatorname{ch}(x), \quad x \in [0, 1].$$

Ekkor

$$f'(x) = \operatorname{sh}(x), \text{ és } 1 + \operatorname{sh}^2(x) = \operatorname{ch}^2(x).$$

Ezért a (5.4) képlet alapján a függvény gráfjának hossza:

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + (\operatorname{ch}'(x))^2} dx = \int_0^1 \operatorname{ch}(x) dx,$$

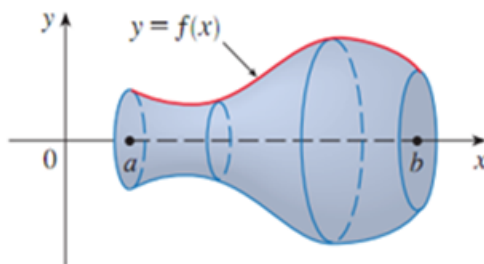
hiszen az ívhossz mindig pozitív. Végül ezt kapjuk:

$$s = \left[\operatorname{sh}(x) \right]_0^1 = \operatorname{sh}(1) - \operatorname{sh}(0) = \frac{e + e^{-1}}{2}.$$

5.4.2. Forgástest felszíne és térfogata*

(Kiegészítő tananyag)

Tekintsünk egy $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ sima függvényt, és forgassuk meg a függvény gráfját az x tengely körül.



Az így kapott forgástest egy háromdimenziós test lesz. Ennek térfogatát ;s felszínét egy-egy speciális integrállal tudjuk kiszámítani:

5.6. Állítás. *A fenti forgástest felszíne és térfogata:*

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx, \quad V = \pi \cdot \int_a^b f^2(t) dt. \quad (5.5)$$

Bizonyítás* Azt az alapötletet használhatjuk, hogy az $[a, b]$ intervallum egy felosztása után a forgástestet hengerekkel közelítjük. A kis hengerek magassága az osztópontok távolsága lesz. A kis hengerek térfogata és palástjainak felszíne könnyen számolható. A felosztás finomságát csökkentve, határértékként egy-egy integrált kapunk, épp a fenti formulákat.

6. Gyakorlat. Számolja végig a fenti ötlet alapján az (5.5) formulák helyességét.

6. fejezet

Differenciálegyenletek

6.1. Bevezetés

6.1.1. Egy példa

Láttuk, hogy ha

$$f(x) = e^x, \quad \text{akkor} \quad f'(x) = e^x.$$

Általában, tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén, ha

$$f(x) = e^{ax} \quad \text{akkor} \quad f'(x) = ae^{ax}.$$

Kicsit más jelöléssel azt írhatjuk, hogy ha

$$y = e^{ax} \quad \text{akkor} \quad y' = ay.$$

Ez a tulajdonság megfordítva is igaz, ezt megfogalmazzuk állításként.

6.1. Állítás. *Ha egy $y = f(x)$ függvényre igaz, hogy $y' = ay$, akkor $y = ce^{ax}$ valamely $c \in \mathbb{R}$ konstans mellett.*

Bizonyítás. Defináljunk egy másik $z = z(x)$ függvényt a következőképpen:

$$z := ye^{-ax}.$$

Ekkor ennek deriváltja

$$z' = y' e^{-ax} + y (-a) e^{-ax} = a y e^{-ax} + y (-a) e^{-ax} = 0.$$

Ha egy függvény deriváltja egy intervallumban 0, akkor az a függvény konstans abban az intervallumban (ezt mondja ki az Integrálszámítás I. alaptétele). ezért van olyan $c \in \mathbb{R}$, melyre $z \equiv c$, így

$$ye^{-ax} = c \quad \implies \quad y = ce^{ax}.$$

6.1.2. Mit nevezünk differenciálegyenletnek?

6.1. Definíció. *Differenciálegyenlet (DE) olyan egyenlet, melyben az ismeretlen egy függvény, és az egyenletben szerepel ennek az ismeretlen függvénynek valamely deriváltja is.*

Legegyszerűbb eset a primitív függvény keresés, amikor adott $f(x)$ függvény mellett az egyenlet:

$$y' = f(x).$$

Ennek megoldása a határozatlan integrál, a primitív függvények halmaza:

$$y = \int f(x)dx.$$

A differenciálegyenletnek két változója van. x a független, y a függő változó, ahol $y = y(x)$.

1. *Példa.* Legyen a differenciálegyenlet

$$y' = 2x.$$

Ekkor a megoldás

$$y = y(x) = \int 2x dx = x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ez a differenciálegyenlet **általános megoldása**, ami végtelen sok függvényt jelent.

A megoldás szűkíthető a következőképpen. Azt az y megoldást keressük, amelyre van plusz feltétel, pl $y(2) = 7$. Ekkor a megoldás menete:

$$y(2) = 7 \quad \Rightarrow \quad y(2) = 2^2 + c \quad \Rightarrow \quad c = 3.$$

Tehát a megoldás, amit **partikuláris megoldásnak** hívunk:

$$y(x) = x^2 + 3.$$

6.2. Definíció. *Differenciálegyenlet **rendjén** az ismeretlen függvény legmagasabb fokú deriváltjának foksámát értjük, ami az egyenletben szerepel.*

Példa. $y' = y$ elsőrendű, $y'' = -y$ másodrendű differenciálegyenlet.

6.3. Definíció. *Az elsőrendű differenciálegyenlet általános alakja*

$$y' = f(x, y), \quad (6.1)$$

ahol $f(x, y)$ adott kétváltozós függvény.

6.4. Definíció. ***Cauchy feladat**, vagy kezdeti érték feladat során a (6.1) differenciálegyenletnek azt a megoldását keressük (ha van), melyre*

$$y(x_0) = y_0,$$

ahol x_0 és y_0 adott számok.

Mivel kétváltozós függvényekkel még nem foglalkoztunk, az általános esetre később térünk majd vissza.

2. *Példa.* Tekintsük az alábbi másodrendű differenciálegyenletet:

$$y'' = -y. \quad (6.2)$$

Láttuk, hogy ha $f(x) = \sin(x)$, akkor

$$f'(x) = \cos(x), \quad f''(x) = -\sin(x) = -f(x).$$

Hasonlóan, ha $g(x) = \cos(x)$, akkor

$$g'(x) = -\sin(x), \quad g''(x) = -\cos(x) = -g(x).$$

Tehát a fenti $y = f(x)$ és $y = g(x)$ függvények megoldásai a (6.2) differenciálegyenletnek. Továbbá, ha $F(x)$ és $G(x)$ megoldások, akkor

1. $F(x + c)$,
2. $cF(x)$,
3. $aF(x) + bG(x)$,
4. $F'(x)$

is megoldások. Végtelen sok megoldást fel tudunk írni tehát. Azt a konkrét megoldást keressük, ahol

$$y(0) = a, \text{ és } y'(0) = b \quad (6.3)$$

adott értékek.

6.2. Állítás. *Az (6.1)–(6.3) Cauchy feladatnak van egyértelmű megoldása.*

Bizonyítás. Először belátjuk, hogy ha van megoldás, akkor az egyértelmű. Induljunk ki abból, hogy

$$y'' + y = 0 \quad / \cdot 2y',$$

ahonnan

$$2y'y'' + 2yy' = 0.$$

Ez épp két derivált négyzetösszege, azaz

$$(y'^2)' + (y^2)' = 0,$$

így azt kaptuk, hogy

$$(y'^2 + y^2)' = 0.$$

Ebből az következik, hogy minden y megoldáshoz van egy olyan $c \in \mathbb{R}$ konstans, melyre

$$y'^2(x) + y^2(x) = c, \quad \forall x. \quad (6.4)$$

Tegyük fel, hogy két megoldás is van az adott kezdeti feltételhez. $y_1(x)$ és $y_2(x)$ mindkettő megoldása a DE-nek, és kielégíti a kezdeti feltételeket.

Ekkor

$$z(x) = y_1(x) - y_2(x)$$

is megoldása a DE-nek, a hozzá tartozó kezdeti értékek:

$$z(0) = y_1(0) - y_2(0) = a - a = 0,$$

$$z'(0) = y_1'(0) - y_2'(0) = b - b = 0.$$

Másrészt $z(x)$ -re is teljesül a (6.4) azonosság, tehát

$$z''(x) + z^2(x) = c, \quad \forall x.$$

Speciálisan $x = 0$ -ra is:

$$z''(0) + z^2(0) = c \quad \implies \quad c = 0.$$

Ezt visszahelyettesítve:

$$z''(x) + z^2(x) \equiv 0,$$

ami csak akkor teljesülhet, ha $z(x) \equiv 0$. Ezzel az egyértelműséget beláttuk.

A megoldás létezését úgy igazoljuk, hogy felírjuk a megoldást:

$$y(x) := b \sin(x) + a \cos(x).$$

Ez megoldása a differenciálegyenletnek, láttuk. A kezdeti feltételeket valóban kielégíti, hiszen

$$y(0) = b \cdot 0 + a \cdot 1 = a,$$

$$y'(0) = b \cdot 1 + a \cdot (-0) = b.$$

Összefoglalva:

1. $y_1(x) = \sin(x)$, $y_2(x) = \cos(x)$ megoldások.

2. Tetszőleges megoldás felírható ezek lineáris kombinációjaként. Ez azt jelenti, hogy ha y megoldás, akkor vannak olyan a, b valós számok, melyekre

$$y(x) = ay_1(x) + by_2(x).$$

A fenti y_1 , és y_2 az (6.1) differenciálegyenlet **alapmegoldásai**.

3. *Példa.* Tekintsük újra a kiinduló elsőrendű differenciálegyenletet:

$$y' = ay.$$

Ebben az esetben egyetlen alapmegoldás van:

$$y(x) = e^{ax},$$

és minden megoldás ennek konstans-szorosa.

6.2. Speciális differenciálegyenletek

6.2.1. Szeparábilis differenciálegyenlet

Tegyük fel, hogy a (6.1) differenciálegyenlet jobboldalán szereplő $f(x, y)$ függvényben szétválasztható x és y a következőképpen:

$$f(x, y) = \frac{\alpha(x)}{\beta(y)}, \quad \beta(y) \neq 0,$$

ahol α, β adott függvények. Ekkor a differenciálegyenlet ilyen alakú:

$$y' = \frac{\alpha(x)}{\beta(y)}.$$

Ezt **szeparábilis** vagy **szétválasztható változójú** DE-nek nevezzük.

Ennek megoldását keressük.

$$y' = y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\alpha(x)}{\beta(y)},$$

ahonnan formális átszorzással azt kapjuk, hogy

$$” \beta(y)dy = \alpha(x)dx ”.$$

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$B(y) = \int \beta(y)dy, \quad A(x) = \int \alpha(x)dx,$$

tehát $A(x)$ és $B(y)$ valamely primitív függvényeket jelentenek.

Könnyen látható, hogy ha $y = y(x)$ megoldás, akkor a két primitív függvényre teljesül valamilyen c konstanssal:

$$B(y) = A(x) + c.$$

Ebből y meghatározható.

Példa. Legyen a DE

$$y' = \frac{y^2}{x^2},$$

akkor

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2},$$

így formálisan:

$$” \frac{1}{y^2}dy = \frac{1}{x^2}dx ”.$$

Innen integrálással kapjuk a megoldáshoz szükséges primitív függvényeket:

$$\int \frac{1}{y^2}dy = -\frac{1}{y}, \quad \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x},$$

és innen

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + c \quad \implies \quad -\frac{1}{y} = \frac{cx - 1}{x}.$$

Az általános megoldás tehát:

$$y = \frac{x}{1 - cx}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

6.2.2. Lineáris differenciálegyenlet

Lineáris DE-ről akkor beszélünk, ha az (6.1) differenciálegyenlet jobboldalán szereplő $f(x, y)$ az y változóban lineáris, azaz

$$f(x, y) = a(x)y + b(x),$$

ahol $a(x)$, $b(x)$ adott függvények. Így a differenciálegyenlet

$$y' = a(x)y + b(x).$$

Ha $b(x) \equiv 0$, akkor a DE **homogén lineáris**. Ha $b(x) \not\equiv 0$, akkor a DE **inhomogén lineáris**.

Homogén LDE

Ekkor a differenciálegyenlet

$$y' = a(x)y,$$

ez egyben szeparábilis. Tehát meg tudjuk már oldani, formálisan

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y \quad \Longrightarrow \quad " \frac{1}{y} dy = a(x) dx "$$

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$A(x) = \int a(x) dx, \quad B(y) = \int \frac{1}{y} dy = \ln |y|.$$

Ekkor

$$\ln |y| = A(x) + C \quad \Longrightarrow \quad |y| = e^{A(x)+C},$$

ahonnan

$$y = ce^{A(x)}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Itt $c = \pm e^C$, ezért az abszolútértéket el lehet hagyni y körül.

6.3. Állítás. *A homogén lineáris DE általános megoldása:*

$$y(x) = ce^{A(x)}.$$

Speciálisan, ha

$$y' = ay,$$

azaz $a(x) \equiv a$ konstans, akkor

$$A(x) = \int a \, dx = ax + d,$$

és így a megoldás

$$y(x) = ce^{ax}, \quad c = \pm e^d.$$

Kezdeti érték (Cauchy) feladat. Adott egy kezdeti feltétel is,

$$y(x_0) = y_0.$$

A fenti általános megoldásban szereplő c meghatározható:

$$y(x_0) = ce^{A(x_0)} = y_0 \quad \implies \quad c = y_0 e^{-A(x_0)}.$$

A Cauchy feladat megoldása tehát $y(x) = y_0 e^{A(x) - A(x_0)}$.

Konkrét számításhoz konkrét primitív függvényt használunk, és pedíg legyen

$$A(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt.$$

Ekkor az általános megoldás

$$y(x) = ce^{\int_{x_0}^x a(t) dt},$$

és a kezdeti feladat megoldása

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^x a(t) dt}.$$

Inhomogén LDE.

Ekkor az egyenlet

$$y' = ay + b$$

alakú, ahol $a = a(x)$ és $b = b(x)$ adott függvények.

Láttuk, hogy a homogén lineáris egyenlet megoldása $y = ce^{A(x)}$, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans. Az inhomogén egyenlet megoldását úgy keressük, hogy a c konstans helyett egy függvényt írunk ($c \simeq u(x)$):

$$y = u(x)e^{A(x)}, \quad u = u(x) = ?$$

A DE baloldala

$$y' = u'(x)e^{A(x)} + u(x)a(x)e^{A(x)}.$$

A DE jobboldala

$$ay + b = a(x)u(x)e^{A(x)} + b(x).$$

A két oldal egyenlő. Ebből egyszerűsítve azt kapjuk, hogy

$$u'(x)e^{A(x)} = b(x) \Rightarrow u'(x) = b(x)e^{-A(x)} \Rightarrow u(x) = \int b(x)e^{-A(x)} dx.$$

Az inhomogén DE általános megoldása:

$$y(x) = \underbrace{ce^{A(x)}}_{\text{homogén}} + \underbrace{e^{A(x)} \cdot \int b(x)e^{-A(x)} dx}_{\text{inhomogén}}, \quad c \in \mathbb{R}$$

ahol az első tag a homogén egyenlet általános megoldása, a második az, inhomogén egyenlet egy konkrét megoldása.

Példa. Oldjuk meg az alábbi inhomogén LDE-t:

$$y' = -xy - x.$$

A megoldás két lépésben történik.

1. *A homogén egyenlet megoldása.* Mivel

$$A(x) = \int a(x) dx = \int (-x) dx = \frac{-x^2}{2},$$

ezért a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_h(x) = c e^{\frac{-x^2}{2}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

2. Az inhomogén egyenlet megoldása.

$$u(x) = \int b(x)e^{-A(x)}dx = \int (-x)e^{\frac{x^2}{2}}dx = -e^{\frac{x^2}{2}},$$

ezért az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$y_p(x) = u(x)e^{\frac{-x^2}{2}} = (-e^{\frac{x^2}{2}})e^{\frac{-x^2}{2}} = -1.$$

Az általános megoldás:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ce^{\frac{-x^2}{2}} - 1, \quad c \in \mathbb{R}.$$

6.3. Differenciálegyenletek a fizikában*

(Kiegészítő tananyag.)

Néhány egyszerű példán bemutatjuk, hogyan jelennek meg természetes módon a fizikában a differenciálegyenletek.

Sugárzás erőssége

Valamely sugárzás (pl. fény, radioaktivitás) intenzitását szeretnénk meghatározni. Jelölje $I(x)$ az intenzitás mértékét x út megtétele után. A kiinduló intenzitás legyen

$$I(0) = I_0.$$

Fizikai megfontolásból tudjuk, hogy az intenzitás megváltozása $I(x)$ és $I(x + \Delta x)$ között arányos a megtett úttal, ami Δx , és az intenzitás aktuális nagyságával. Ezért az intenzitás megváltozását így közelíthetjük:

$$I(x + \Delta x) - I(x) =: \Delta I \approx -\Delta x \cdot I(x).$$

Az arányossági tényezőt jelölje $\mu > 0$. Ebből

$$\Delta I = -\mu \cdot \Delta x \cdot I \quad \Longrightarrow \quad \frac{\Delta I}{\Delta x} = -\mu I.$$

$\Delta x \rightarrow 0$ esetén:

$$\frac{dI}{dx} = -\mu I \quad \Longrightarrow \quad I'(x) = -\mu I(x).$$

Tehát azt a DE-t kaptuk, hogy

$$\frac{I'(x)}{I(x)} = -\mu.$$

A baloldalt integrálva ezt kapjuk:

$$\int \frac{I'(x)}{I(x)} dx = \ln(I(x)) + c.$$

(Az abszolútérték elhagyható, mert pozitív fizikai mennyiségről van szó.)

A jobboldalt integrálva ezt kapjuk:

$$\int -\mu dx = -\mu x + c.$$

A kettőt összevetve

$$\ln(I(x)) = -\mu x + c.$$

Ebből:

$$I(x) = Ce^{-\mu x}.$$

Speciálisan, azt a megoldást keressük, amikor az intenzitás a kezdeti pontban ($x = 0$) ismert, azaz

$$I(0) = I_0 \quad \Longrightarrow \quad C = I_0.$$

Ezért az intenzitás függvény

$$I(x) = I_0 e^{-\mu x}.$$

Rezgőmozgás fizikai leírása

Rezgőmozgás fizikai leírása alatt, pl. egy rugó mozgásának matematikai jellemzését értjük.

Tegyük fel, hogy m tömegű részecske az x tengely mentén mozog, a kitérését az idő függvényében szeretnénk leírni. A t időpillanatban a kitérést jelölje $x(t)$. Ebben az esetben a független változó t , a függő változó pedig x .

A mozgást a $t = 0$ időpontban $x(0) = x_0$ -ból indítjuk. A pillanatnyi sebesség nem más, mint az út-függvény a deriváltja: $\dot{x}(t)$, a pillanatnyi gyorsulás ennek második deriváltja: $\ddot{x}(t)$.

A rugóra ható erők az alábbiak

1. rugóerő: $-kx$ (a kitéréssel arányos, azzal ellentétes irányú),
2. közegellenállási erő: $-r\dot{x}$ (a pillanatnyi sebességgel arányos, és azzal ellentétes irányú),
3. külső gerjesztés: $f(t)$ (pl. meglökjük időnként).

A Newton-törvény szerint felírhatjuk az alábbi összefüggést az eredő erők összegéről:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + f.$$

Az $x(t)$ mozgást leíró differenciálegyenlet tehát:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = f.$$

Ha $f \equiv 0$ (ez egy szabad mozgás), akkor *homogén DE*-ről beszélünk.

Ha $f \neq 0$ (ez kényszermozgás), akkor *inhomogén DE*-t kapunk.

A homogén DE megoldását fogjuk most meghatározni. Ez egyenlet:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0, \quad (6.5)$$

$x(t) = ?$ Első lépésben a megoldást $x(t) = e^{\lambda t}$ alakban keressük. Ekkor

$$x(t) = e^{\lambda t} \implies \dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t} \implies \ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}.$$

A fenti összefüggéseket visszahelyettesítve az (6.5) egyenletbe:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + r\dot{x} + kx &= ke^{\lambda t} + r\lambda e^{\lambda t} + m\lambda^2 e^{\lambda t} = \\ &= e^{\lambda t}(m\lambda^2 + r\lambda + k) = 0, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Ez a (6.6) összefüggés csak akkor teljesülhet, ha

$$m\lambda^2 + r\lambda + k = 0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a megoldása

$$\lambda_{1,2} = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - 4mk}}{2m}.$$

Három esetet kell megkülönböztetni.

1. *eset.* Ha $r^2 - 4mk > 0$, ekkor léteznek $\lambda_1 \neq \lambda_2$ valós gyökök. Vegyük észre, hogy $\lambda_1 < 0$ és $\lambda_2 < 0$ minden esetben.

A DE-nek két megoldása is van,

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad x_2(t) = e^{\lambda_2 t},$$

és ezek tetszőleges lineáris kombinációja is kielégíti az egyenletet:

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Mivel $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, a megoldás exponenciális sebességgel 0-hoz tart.

2. eset. Ha $r^2 - 4mk = 0$, akkor a másodfokú egyenletnek kétszeres gyöke van, és pedig

$$\lambda_0 = -\frac{r}{2m}.$$

Ekkor láttuk, hogy

$$x_1(t) = e^{\lambda_0 t}$$

megoldás. Belátjuk, hogy egy másik megoldás lesz:

$$w(t) = te^{\lambda_0 t}.$$

Valóban, kiszámoljuk a deriváltakat,

$$\dot{w}(t) = e^{\lambda_0 t} + \lambda_0 te^{\lambda_0 t},$$

$$\ddot{w}(t) = \lambda_0 e^{\lambda_0 t} + \lambda_0 e^{\lambda_0 t} + \lambda_0^2 te^{\lambda_0 t},$$

így behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$m\ddot{w} + r\dot{w} + kw = e^{\lambda_0 t} \{t(m\lambda_0^2 + r\lambda_0 + k) + 2m\lambda_0 + r\} \equiv 0.$$

Az általános megoldás ebben az esetben

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_0 t} + c_2 t e^{\lambda_0 t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

és mivel $\lambda_0 < 0$, ezért ez is exponenciálisan lecseng 0-hoz.

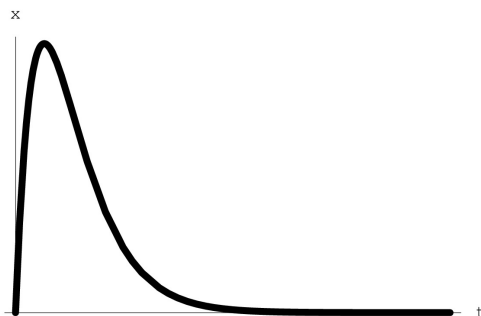
Fizikai interpretáció. Ha $r^2 - 4mk \geq 0$, ekkor $r \geq \sqrt{4mk}$. Ez azt jelenti, hogy olyan nagy a közegellenállás, hogy a rugó kitérés exponenciálisan csökken.

3. eset. Ha $r^2 - 4mk < 0$, akkor nincs valós gyöke a másodfokú egyenletnek. Formálisan azt írhatjuk, hogy

$$\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{-\nu^2},$$

ahol:

$$-\nu^2 = \frac{r^2 - 4mk}{4m^2}.$$



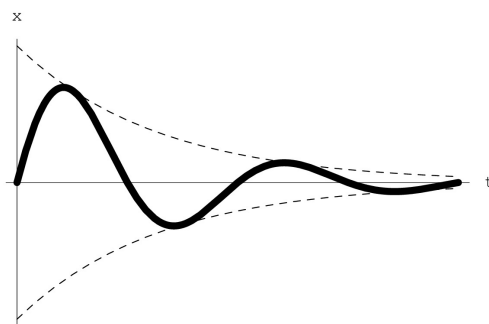
6.1. ábra. Nagy a közegellenállás esetén a rugó kitérése exponenciálisan lecseng.

Két megoldás adódik:

$$v_1(t) = e^{-\mu t} \cos(\nu t), \quad v_2(t) = e^{-\mu t} \sin(\nu t).$$

Ezek valóban megoldások. Behelyettesítéssel ellenőrizhető.

Ha $r < \sqrt{4mk}$, akkor kicsi a közegellenállás, és a rugó oszcilláló mozgást fog végezni exponenciálisan lecsengő amplitúdóval.



6.2. ábra. Kicsi a közegellenállás esetén a rugó csillapított rezgőmozgást végez

Speciális feladat. Ha $r = 0, m = k$ akkor a már ismert

$$\ddot{x} + x = 0$$

egyenletet kapjuk, ami a harmonikus rezgőmozgás egyenlete. Ezt már láttuk, általános megoldása:

$$x(t) = a \cdot \cos(t) + b \cdot \sin(t),$$

ahol a és b a kezdeti kitéréstől és kezdősebességtől függ.

7. fejezet

Taylor polinom. Taylor sor

7.1. Elsőfokú Taylor polinom

Láttuk, hogy ha f differenciálható x_0 -ban, akkor

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0).$$

Itt az $\approx$ jel azt jelenti, hogy $f(x)$ közelíthető ebben az értelemben:

$$\frac{f(x) - (f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0))}{x - x_0} \longrightarrow 0, \quad \text{ha } x \rightarrow x_0.$$

7.1. Definíció. Legyen x_0 az f függvény értelmezési tartományának belső pontja, itt differenciálható. Legyen

$$T_1^{x_0}(x) := f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0),$$

ez a függvény x_0 -hoz tartozó **elsőfokú Taylor polinomja**.

Az egyszerűség kedvéért a felső indexben levő x_0 jelölést elhagyjuk. Vegyük észre, hogy ez éppen az $(x_0, f(x_0))$ pontban a függvény gráfjához húzott érintő egyenes egyenlete.

7.1. Állítás.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_1(x)}{x - x_0} = 0.$$

Ennek az állításnak pontosabb megfelelője az alábbi Tétel, feltéve a másodrendű deriválhatóságot is.

7.1. Tétel. Adott f valós függvény és $x_0 \in \text{int}(D_f)$. Feltesszük, hogy f kétszer differenciálható x_0 egy U környezetében. Ekkor $\forall x \in U$ -hoz létezik ξ , melyre

$$f(x) - T_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2, \quad (7.1)$$

ahol ξ az x és az x_0 között van:

$$\xi \in \begin{cases} (x_0, x) & \text{ha } x > x_0 \\ (x, x_0) & \text{ha } x < x_0 \end{cases}.$$

7.2. Definíció. Az $f(x) - T_1(x)$ különbségre vonatkozó (7.1) formulát **Lagrange-féle maradéktagnak** hívjuk.

Megjegyzés. $\frac{f(x) - T_1(x)}{x - x_0} = \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0) \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow x_0$.

Példa. Legyen $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$. Mennyi lesz $T_1(x)$? Szükséges az $f(x_0)$ és az $f'(x_0)$ kiszámítása. $f(x_0) = \sin(0) = 0$, $f'(x_0) = \cos(0) = 1$. Ekkor $T_1(x) = x$. Legyen $x = 0.1$, és $\sin(0.1)$ értékét közelítjük $T_1(0.1)$ -el, mennyi hibát vétünk? A különbség:

$$\frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2 = \frac{-\sin(\xi)}{2}(0.1)^2,$$

így ennek becslése: $|\sin(x) - T_1(x)| \leq \frac{1}{200}$. Ezért $\sin(0.1) \approx 0.1 \pm \frac{1}{200}$.

7.2. n -ed fokú Taylor polinom

Tegyük fel, hogy az f függvény az x_0 egy környezetében n -szer differenciálható.

7.3. Definíció. Az f függvény n -ed rendű Taylor polinomja, mely az x_0 -hoz tartozik:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Más elnevezés: n -ed fokú Taylor polinom. A pontosabb jelölésben ki lehet írni az alappontot is: $T_n(x, x_0)$, mi ezt elhagyjuk.

Magyarázat. Olyan n -ed fokú polinomot keresünk, mely x_0 -ban ugyanúgy viselkedik, mint $f(x)$. Pontosabban:

$$\begin{aligned} P_n(x_0) &= f(x_0), \\ P'_n(x_0) &= f'(x_0), \\ &\vdots \\ P_n^{(n)}(x_0) &= f^{(n)}(x_0). \end{aligned} \tag{7.3}$$

Mivel a P_n polinom $(n+1)$ -dik deriváltja 0, arra már nem lehet feltétel.

7.2. Állítás. *Pontosan egy $P_n(x)$ polinom létezik a (7.3) tulajdonságokkal.*

Bizonyítás. Az egyértelműség triviális. (HF).

A létezést úgy igazoljuk, hogy megadjuk a polinomot. Be fogjuk látni, hogy $P_n(x) := T_n(x)$ rendelkezik a (7.3) tulajdonságokkal, ez az n -ed fokú Taylor polinom.

$T_n(x)$ és deriváltjai az x_0 -ban:

$$\begin{aligned} T_n(x_0) &= f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x_0 - x_0)^n = f(x_0) \\ T'_n(x_0) &= f'(x_0)1 + \frac{f''(x_0)}{2}2(x_0 - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}n(x_0 - x_0)^{n-1} = \\ &= f'(x_0) \\ &\vdots \\ T_n^{(k)}(x_0) &= \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}k! + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-k)!}(x_0 - x_0)^{n-k} = f^{(k)}(x_0) \quad k \leq n. \end{aligned}$$

Megvizsgáljuk, hogy mennyire jól közelíti a Taylor polinom az eredeti függvényt x_0 környezetében.

7.4. Definíció. Az $L_n(x) := f(x) - T_n(x)$ a **Lagrange-féle maradéktag**.

7.2. Tétel. Tegyük fel, hogy az f függvény $(n+1)$ -szer differenciálható x_0 egy U környezetében. Ekkor létezik olyan $\xi \in U$, melyre:

$$L_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{(n+1)},$$

ahol ξ az x és x_0 között van.

Példa. Legyen $f(x) = e^x$, hogyan becsülhetjük meg $e^{0,1}$ értékét? A közelítést harmadrendű Taylor-polinommal végezzük, célszerű az $x_0 = 0$ választás.

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3.$$

Ismerjük a függvény deriváltjait: $f'(x) = e^x = f''(x) = f'''(x)$. Ezért

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1 \implies T_3 = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

$$e^{0,1} \approx 1 + 0,1 + \frac{0,01}{2} + \frac{0,001}{6}.$$

A hiba nagyságrendje:

$$f(x) - T_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4, \quad 0 < \xi < 0,1$$

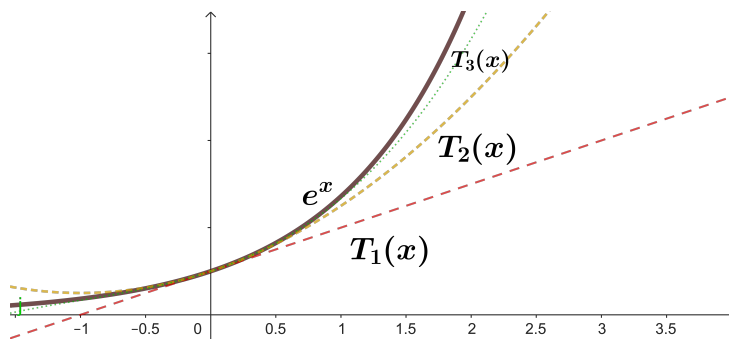
$$\text{így } |L_3(x)| \leq \frac{e^{0,1}}{24}10^{-4} \leq \frac{3}{24}10^{-4}.$$

7.3. Taylor polinom határértéke $n \rightarrow \infty$

Felmerül a kérdés, hogy vajon a (7.2) formulában $n \rightarrow \infty$ esetén mi történik?

Példa. (folytatás) Láttuk, hogy $f(x) = e^x$ n -ed fokú Taylor-polinomja $x_0 = 0$ körül:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}x^k. \end{aligned}$$



7.1. ábra. Az e^x függvény és első 3 Taylor polinomja $x_0 = 0$ esetén.

Rögzített $x \in \mathbb{R}$ esetén a Lagrange féle maradéktag:

$$e^x - T_n(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} \quad \text{ahol } |\xi| \leq |x|.$$

Ezzel igazoltuk, hogy ebben az esetben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

7.4. Taylor sor

Legyen adott egy $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, mely az $x_0 \in (a, b)$ pontban végtelen sokszor differenciálható.

7.5. Definíció. Az f függvény x_0 körüli **Taylor sora** az alábbi függvény:

$$T(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k.$$

Megjegyzés. A Taylor sor pontos jelölése

$$T(x_0, x)$$

lenne. Az egyszerűség kedvéért az első argumentumot elhagyjuk.

Megjegyzés. Ha $x_0 = 0$, akkor szokás a Taylor sor helyett *McLaurent sorról* beszélni.

Kérdés: Milyen feltételekkel lesz igaz, hogy a Taylor sor összegeként megkapjuk a kiindulási függvényt? Mit tudunk mondani az $\{x : f(x) = T(x)\}$ halmazról, ha $x_0 \in \mathbb{R}$ rögzített?

Láttuk, hogy az $f(x) = e^x$ függvény esetén $f(x) = T(x)$ teljesül $\forall x$.

Példa. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{ha } x \neq 0, \\ 0 & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

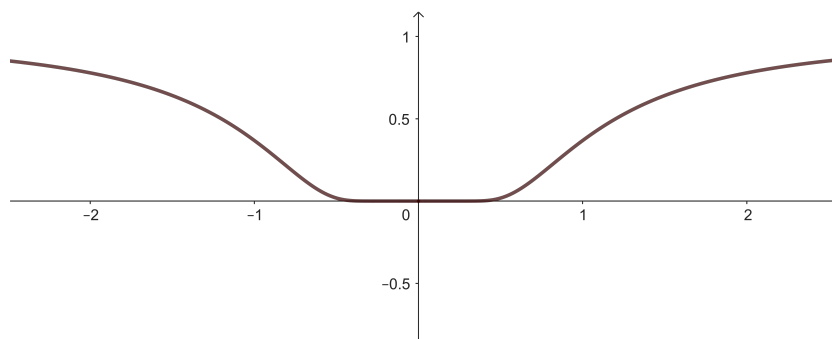
f páros függvény. Legyen $x_0 := 0$. Könnyen igazolható, hogy itt f folytonos. Számoljuk ki a deriváltját:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^{-x^2} = 0.$$

Belátható hasonló módon, hogy

$$f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n > 1.$$

Ekkor tehát $T(x) \equiv 0$, így csak az **egyetlen** $x_0 = 0$ **pontban**-ban állítja elő a függvényt Taylor sora.



7.2. ábra. Az $e^{-\frac{1}{x^2}}$ függvény a 0 közelében.

7.3. Állítás. Adott az $f : (x_0 - R, x_0 + R) \rightarrow \mathbb{R}$ végtelen sokszor differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy ennek $f^{(k)}$ deriváltjai egyenletesen korlátosak, azaz $\exists K > 0$:

$$|f^{(k)}(x)| \leq K, \quad \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R), \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

Ekkor a függvényt előállítja Taylor sora:

$$f(x) = T(x), \quad \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

Bizonyítás* Lagrange-féle maradéktag segítségével látjuk be a fenti állítást. Legyen $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ tetszőleges pont. Mivel

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k,$$

ezért

$$f(x) - T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k \right).$$

A Taylor polinomoknál tanultak alapján

$$f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1},$$

ahol ξ x és x_0 között van. A feltétel szerint

$$|f^{(n+1)}(\xi) \cdot \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}| \leq |f^{(n+1)}(\xi)| \cdot \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \leq K \cdot \frac{(R - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

A jobboldalon levő kifejezés x -től függetlenül 0-hoz tart.

7.6. Definíció. Az f függvényt az x_0 pontban **analitikusnak** nevezzük, ha x_0 -nak létezik olyan $(x_0 - R, x_0 + R)$ környezete, melyben a Taylor sor konvergens és $f(x) = T(x)$, ahol $T(x)$ az x_0 körüli Taylor sor. Az f függvény egy D tartományban analitikus, ha minden $x_0 \in D$ -ben analitikus.

Példa. Legyen $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $x \neq 1$. Ekkor tudjuk, hogy $x_0 = 0$ -ban analitikus, hiszen

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad |x| < 1.$$

Vajon $x_0 = 3$ -ban analitikus-e a függvény?

A válasz: *igen*.

7.Gyakorlat. Ellenőrizték le, hogy a függvény $x_0 = 3$ körüli Taylor sora előállítja a függvényt, ha $1 < x < 5$.

Hasonló gondolatmenettel igazolható, hogy $\forall x_0 \neq 1$ esetén f analitikus.

Tárgymutató

- (Euler féle szám), e , 30
- összetett függvény, 65
- analitikus függvény, 188
- belső pont, 15
- Bernoulli egyenlőtlenség, 17
- Bolzano tétel, 87
- Bolzano-Weierstrass tétel, 35
- Cantor-féle közöspont-tétel, 10
- Cauchy kritérium
 - improprius integrálra, 156
- Cauchy sorozat, 37
- cosinus hiperbolikus, ch , 92
- differentiálegyenlet, 165
 - lineáris, 171
 - rezgőmozgás, 176
 - szeparábilis, 169
- differentiálhányados(derivált), 106
- Dirichlet függvény, 73, 135
- Dirichlet integrál, 154
- divergencia teszt, 49
- egyenletes folytonosság, 98
- függvény határértéke, 74
 - átviteli elv, 78
 - kiterjesztés, 75
- folytonosság, 70
- gyökkritérium, 57
 - gyengített, 58
- hányadoskritérium, 54
 - gyengített, 55
- határozatlan integrál, 129
- határpont, 15
- Heine tétel, 100
- helyettesítés integrálban, 146
- hiperbolikus függvény, 92
 - derivált, 114
- improprius integrál, 149
- infimum, 11
- integrálfüggvény, 147
- integrálszámítás
 - I. alaptétel, 121
 - II. alaptétel, 148
- inverz függvény, 65, 89
 - derivált, 115
- középérték tételek, 119
 - Cauchy tétel, 120

- Lagrange tétel, 119
- Rolle tétel, 119
- külső pont, 15
- Koch görbe, 52
- konvex függvény, 124
- korlátos halmaz, 11
- L'Hospital szabály, 121
- láncszabály, 110
- Leibniz sor, 58
- lineáris érintő, 112
- lokális szélsőérték, 117
 - elégséges feltétel, 123
 - szükséges feltétel, 118
- lokálisan integrálható, 150
- mértani közép, 18
- mértani sor, 48
- majoráns kritérium
 - improprius intergálra, 153
 - számsorokra, 50
 - számsorozatokra, 40
- minoráns kritérium
 - improprius integrálra, 154
 - számsorokra, 50
 - számsorozatokra, 40
- monoton függvények jellemzése, 123
- nullsorozat, 35
- oszcillációs összeg, 135
- primitív függvény, 128
- Riemann összeg, 135
- Riemann integrál, 134
 - elégséges feltétel, 137
- sinus hiperbolikus, sh , 92
- supremum, 12
- számsor
 - abszolút konvergens, 53
 - divergencia, 48
 - feltételesen konvergens, 53
 - konvergenca, 47
- számsorozat, 24
 - összehasonlító kritérium, 40
 - Cauchy feltétel, 37
 - divergens, 27
 - konvergenca monotonítása, 38
 - konvergens, 27
 - korlátos, 24
 - részsorozata, 34
 - rekurzívan definiált, 33
 - rendőr elv, 38
- számtani átlag sorozat, 42
- számtani közép, 18
- számtani- és mértani közép közti egyenlőtlenség, 18
- szakadási hely, 71
- tangens hiperbolikus, th , 93
- Taylor polinom
 - n -ed fokú, 183
 - első fokú, 182
 - Lagrange-féle maradéktag, 184

Taylor sor, 186

torlódási pont, 44

végtelen sor (számsor), 46

Cauchy feltétel, 50

divergencia teszt, 49

valós számok axiómái, 6

Archimedeszi axióma, 7

Cantor axióma, 7

Weierstrass I. tétele, 94

Weierstrass II. tétele, 94