MATEMATIKAI ANALÍZIS I.

Vágó Zsuzsanna

2010. szeptember

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Valós számok

1.1. Bevezetés

A jegyzetben $\mathbb{N}$ jelöli a természetes számok halmazát, $\mathbb{Q}$ a racionális számok halmazát és $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát.

1.1.1. Természetes számok, teljes indukció

A természetes számok halmazán értelmezve van két művelet, az összeadás ($+$) és szorzás ($\cdot$, illetve egymás mellé írás), továbbá a $\leq$ rendezési reláció.

A $\mathbb{N}$ halmaznak két fontos alaptulajdonsága a következő:

1. Van legkisebb elem, ez 1 (egység).
2. Mindegyik elem után van közvetlenül következő: $n \to n+1$

Megjegyzés. Más könyvekben szokás a természetes számok halmazát az $n = 0$ számmal kezdeni. Mi maradunk ennél a konvenciónál.

A fenti két tulajdonság alapján kimondjuk a teljes indukciós bizonyítás elvét.

Teljes indukciós bizonyítási elv. Feladatunk, hogy valamely $A_1, \dots, A_n, \dots$ tulajdonságok teljesülését kell belátnunk, ahol n tetszőleges természetes szám. Ha

1. A_1 teljesül, továbbá
2. bármely $n \epsilon \mathbb{N}$ esetén az A_n tulajdonságból A_{n+1} következik,

akkor a fenti tulajdonság teljesül *minden* n-re.

Megjegyzés. A teljes indukciót úgy képzelhetjük el, mintha fel kellene mennünk egy végtelen hosszú lépcsőn. Ha meg tudjuk tenni az első lépést, és bármely lépcsőfokról eggyel feljebb tudunk jutni, akkor valóban bármilyen magasra felmehetünk.

Megjegyzés. A teljes indukció nem mindig 0-val kezdődik, hanem azzal a legkisebb természetes számtól, ahonnan a képletek érvényesek.

Példa. Igazoljuk, hogy minden $n \epsilon \mathbb{N}$ esetén

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{1.1}$$

Bizonyítás.

1. *A teljes indukció első lépése.*

   $n = 1$ esetén az állítás igaz, hiszen n helyére 1-t helyettesítva azt kapjuk, hogy
   $$1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}. \qquad \surd$$

2. *A teljes indukció második lépése.*

   Tegyük fel, hogy valamely rögzített n-re teljesül az állítás (ez az indukciós feltevés.) Nézzük meg, mit mondhatunk, ha $n+1$ számot adunk össze:
   $$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (*)$$
   Felhasználtuk az indukciós feltevést. Egyszerű algebrai átalakításokkal folytathatjuk:
   $$(*) = \frac{(n+1)}{6}(n(2n+1) + 6n + 6) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6},$$
   ami épp a bizonyítandó állítás, ha n helyére $n+1$-t írunk.

1.2. Valós számok értelmezése

1.2.1. Axiómák

Röviden összefoglaljuk a valós számok felépítésére szolgáló egyik lehetséges axiómarendszert. Adott egy $\mathbb{R}$-rel jelölt halmaz, melynek elemeit valós számoknak nevezzük. $\mathbb{R}$-et megfeleltethetjük a számegyenes pontjainak, természetes módon. Ennek a halmaznak adott két kitüntetett (egymástól különböző) eleme, melyeket 0 és 1 fog jelölni.

Adott $\mathbb{R}$-en két művelet, az összeadás $(+)$ és a szorzás $(\cdot)$, valamint egy $\leq$-vel jelölt rendezési reláció, melyek az alábbi tulajdonságokkal rendelkeznek:

1. csoport: a műveletek alaptulajdonságai.

1. Az összeadás asszociatív, azaz
   $$(x+y)+z = x+(y+z), \qquad \forall x, y, z \epsilon \mathbb{R}.$$

2. $x + 0 = x$, $\forall x \epsilon \mathbb{R}$.
3. Minden $x\epsilon\mathbb{R}$-hez létezik $u\epsilon\mathbb{R}$, melyre $x + u = 0$. Ezt a szám ellentettjének nevezük.
4. Az összeadás kommutatív, azaz
$$x + y = y + x, \qquad \forall x, y \epsilon \mathbb{R}$$
5. A szorzás asszociatív, azaz
$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \qquad \forall x, y, z \epsilon \mathbb{R}.$$
6. $x \cdot 1 = x$, $\forall x \epsilon \mathbb{R}$.
7. Minden $x\epsilon\mathbb{R}$, $x \neq 0$-hoz létezik $u\epsilon\mathbb{R}$, melyre $x \cdot u = 1$. Ezt a szám reciprokának nevezzük.
8. A szorzás kommutatív, azaz
$$x \cdot y = y \cdot x, \qquad \forall x, y \epsilon \mathbb{R}.$$
9. A szorzás disztrubutív az összeadásra, azaz
$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \qquad \forall x, y \epsilon \mathbb{R}.$$

2. csoport: a rendezési reláció tulajdonságai.

10. Minden $x\epsilon\mathbb{R}$ esetén $x \leq x$ (a rendezési reláció reflexív).
11. Tetszőleges $x \neq y$ esetén az $x \leq y$ és $y \leq x$ közül pontosan egy igaz.
12. Ha $x \leq y$ és $y \leq z$, akkor $x \leq z$ (a rendezési reláció tranzitív).
13. Ha $x \leq y$, akkor $x + z \leq y + z$ minden $z\epsilon\mathbb{R}$ esetén.
14. Ha $x \leq y$ és $0 \leq z$ akkor $x \cdot z \leq y \cdot z$.

3. csoport:

15. (Archimedeszi axióma) A valós számok halmazában nincs legnagyobb elem.

16. (Cantor-féle axióma) Legyen adott korlátos és zárt intervallumok egy sorozata:

$$I_1 = [a_1, b_1] \quad I_2 = [a_2, b_2] \ldots I_n = [a_n, b_n], \ldots$$

melyekre

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_n \ldots .$$

Ekkor van közös pont, azaz

$$\exists c \epsilon \mathbb{R} \qquad \text{melyre} \qquad c \epsilon I_k, \ \forall k \epsilon \mathbb{N}.$$

Megjegyzés. A Cantor axióma átfogalmazható a következőképp: Tegyük fel, hogy adottak az

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n \ldots$$

számok ("bal oldalak") és a

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \ldots \geq b_n \ldots$$

számok ("jobb oldalak"), melyekre teljesül, hogy:

$$a_k \leq b_k \quad \forall k \epsilon \mathbb{N}.$$

Ekkor létezik $c \epsilon \mathbb{R}$, melyre

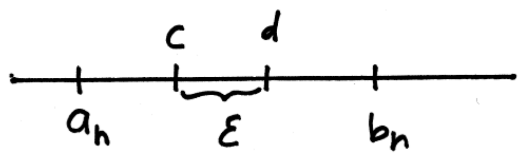
$$a_k \leq c \leq b_k \qquad \forall k \epsilon \mathbb{N}.$$

(Ez a Cantor-axióma biztosítja, hogy az irracionális számok is beletartoznak a valós számok halmazába.)

1.2.2. Cantor-féle közöspont-tétel

1.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a Cantor-féle axióma feltételei teljesülnek. Ezen kívül tegyük fel, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan I_k intervallum, mely az adott ε-nál rövidebb, azaz $|I_k| = b_k - a_k < \varepsilon$. Ekkor a közös pont egyértelmű.*

Bizonyítás. Indirekt módon látjuk be a tételt. A Cantor-axiómából következik, hogy létezik közös pont. Feltesszük, hogy két közös pont van: $c, d \epsilon I_k$ minden k-ra, és például $c < d$.



1.1. ábra. A Cantor féle közösponttétel bizonyítása

Legyen $\varepsilon = d - c$. Ekkor a feltétel szerint létezik $n \epsilon \mathbb{N}$, amire $b_n - a_n < \varepsilon$. Ekkor mivel

$$c \epsilon [a_n, b_n], \qquad d \epsilon [a_n, b_n],$$

ezért $\varepsilon = d - c < b_n - a_n < \varepsilon$, ami ellentmondás.

1.3. A valós számok részhalmazai

1.3.1. Infimum és supremum

Legyen $H \subset \mathbb{R}$ a valós számok halmazának egy részhalmaza.

1.1. Definíció. - *A H halmaz alulról korlátos, ha van olyan $k \epsilon \mathbb{R}$, melyre*

$$k \leq x \qquad \forall x \epsilon H.$$

- *A H halmaz felülről korlátos, ha van olyan $K \epsilon \mathbb{R}$, melyre*

$$x \leq K \qquad \forall x \epsilon H.$$

- *A H halmaz korlátos, ha alulról és felülről is korlátos.*

1.2. Definíció. *Legyen H egy alulról korlátos nem üres halmaz. Megmutatható, hogy az alsó korlátok közt létezik legnagyobb. A halmaz legnagyobb alsó korlátját* ***infimum****nak nevezzük. Jele* $\inf(H)$.
Más szóval, az $s \epsilon \mathbb{R}$ szám a H halmaz infimuma, ha

- *egyrészt s alsó korlát, azaz*

$$s \leq x, \qquad \forall x \epsilon H,$$

- *másrészt ha s' egy tetszőleges alsó korlátja H-nak, akkor*

$$s' \leq s.$$

1.3. Definíció. *Legyen H egy felülről korlátos nem üres halmaz. Megmutatható, hogy a felső korlátok közt van legkisebb. A halmaz legkisebb felső korlátját **supremum**nak nevezzük. Jele* $\sup(H)$.
Más szóval, az $S \epsilon \mathbb{R}$ szám a H halmaz supremuma, ha

- *egyrészt S felső korlát, azaz*

$$S \geq x, \qquad \forall x \epsilon H,$$

- *másrészt ha S' egy tetszőleges felső korlátja H-nak, akkor*

$$S' \geq S.$$

1. *Példa.* Legyen $H = [a, b]$ zárt intervallum. Ekkor

$$\inf(H) = a, \qquad\qquad \sup(H) = b,$$

hiszen például $a \leq x$ minden $x \epsilon H$ esetén, és ez a legnagyobb ilyen tulajdonságú szám.

Megjegyzés. Ha van H elemei közül legkisebb, akkor ez az infimum. Tehát

$$\inf(H) = \min(H)$$

ha a minimum létezik. Hasonlóan, ha a halmazban van maximális elem, akkor

$$\sup(H) = \max(H).$$

2. *Példa.* Legyen $H = (a, b)$ nyílt intervallum. Ekkor is

$$\inf(H) = a, \qquad\qquad \sup(H) = b.$$

Megjegyzés. A fenti példákból is látszik, hogy $\inf(H)\epsilon H$ vagy $\inf(H)\not\epsilon H$ is előfordulhat.

3. *Példa.* Legyen

$$H = \{\frac{1}{n} : \quad n\epsilon\mathbb{N}\}.$$

Ekkor nyilván $\sup(H) = \max(H) = 1$. Legkisebb eleme nincs a halmaznak. Belátjuk, hogy $\inf(H) = 0$. Nyilván $0 \leq 1/n$ minden n -re, tehát a 0 alsó korlát. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, belátjuk, hogy ez nem lehet alsó korlát. Ekkor

$$N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$$

választással

$$\varepsilon > \frac{1}{N+1},$$

tehát ε nem alsó korlát.

Igazolnunk kell, hogy a fenti infimum és supremum jól definiáltak.

1.2. Tétel. *Tetszőleges nem üres, alulról korlátos H halmaznak létezik infimuma.*

Bizonyítás. (Konstruktív bizonyítás) A halmaz alulról korlátos, tehát létezik alsó korlátja, legyen ez a_1. Ha $a_1\epsilon H$, akkor ez minimális elem, egyben infimum is. Ha $a_1\not\epsilon H$, akkor legyen $b_1\epsilon H$ tetszőleges elem, $b_1 > a_1$. Legyen $I_1 = [a_1, b_1]$ és definiáljuk a $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ számot.

Két eset lehetséges. Ha c_1 alsó korlát, akkor legyen $a_2 := c_1$ és $b_2 := b_1$. Ha c_1 nem alsó korlát, akkor legyen $a_2 := a_1$ és $b_2 := c_1$. Látható, hogy az $I_2 = [a_2, b_2]$ intervallum hossza épp fele I_1 hosszának, ahol a_2 alsó korlát, $b_2\epsilon H$.

Ezt a konstrukciót folytatva egy I_k intervallumsorozatot kapunk, az alábbi tulajdonságokkal:

(i) $I_k = [a_k, b_k]$ zárt és $I_{k+1} \subset I_k$,

(ii) I_k hossza $2^{-k}|I_1|$,

(iii) a_k alsó korlát, $b_k\epsilon H$ minden k-ra.

Az (i) és (ii) tulajdonságok miatt az intervallum-sorozat teljesíti a Cantor-féle közösponttétel feltételeit, tehát létezik egyetlen közös pont, legyen ez s. Belátjuk, hogy

$$s = inf(H).$$

Ehhez egyrészt igazolni kell, hogy s alsó korlát. Ha ugyanis lenne egy olyan $h \epsilon H$ elem, melyre $h < s$ teljesülne, akkor a (ii) tulajdonság miatt találnánk egy olyan I_k intervallumot, melyre $h < a_k \leq s$ lenne, ami ellentmond annak, hogy a_k alsó korlát.

Hasonlóképp igazoljuk, hogy nincs s-nél nagyobb alsó korlát. Ha ugyanis indirekt módon feltesszük, hogy van ilyen $s' > s$ alsó korlát, akkor találunk egy I_k intervallumot, melyre $s \leq b_k < s'$. De mivel $b_k \epsilon H$ minden k-ra, így ez nem lehetséges.

1.1. Következmény. *Tetszőleges nem üres, felülről korlátos H halmaznak létezik supremuma.*

1.3.2. Topológiai alapfogalmak

1.4. Definíció. *Egy x_0 valós szám **környezet**ei az*

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

nyílt intervallumok, ahol $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

Legyen a továbbiakban $H \subseteq \mathbb{R}$ tetszőleges részhalmaz.

1.5. Definíció. *Az $x_0 \epsilon \mathbb{R}$ pont a H halmaz **belső pontja**, ha van olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy*

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq H.$$

A belső pontok halmazát $\mathrm{int}(H)$ *jelöli. (Az INTERIOR szó rövidítéséből.)*

1.6. Definíció. *Az $x_0 \epsilon \mathbb{R}$ pont a H halmaz **külső pontja**, ha van olyan $\varepsilon > 0$ szám, hogy*

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap H = \emptyset.$$

A külső pontok halmazát ext(H) jelöli. (Az EXTERIOR szó rövidítéséből.)

1.7. Definíció. *Az $x_0 \epsilon \mathbb{R}$ pont a H halmaz **határpontja**, ha se nem külső, se nem belső pontja.*
Ez azt jelenti, hogy minden $\varepsilon > 0$ mellett az $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ környezet tartalmaz H-beli és H-n kívüli pontokat is. A határpontok halmazát $\partial(H)$ jelöli. Egy halmaz lezárását úgy kapjuk meg, hogy hozzávesszük a határpontokat. Jele $\overline{H}$.

1.8. Definíció. *A H halmaz **nyílt**, ha minden pontja belső pont. A H halmaz **zárt**, ha minden határpontját tartalmazza.*

1. *Példa.* Legyen $H = (a, b)$ egy nyílt intervallum. Belső pontok halmaza:

$$\text{int}(H) = \{x : a < x < b\}.$$

A határpontok halmaza: $\partial(H) = \{a, b\}$. A lezárás

$$\overline{H} = \text{ int}(H) \cup \partial H = [a, b].$$

2. *Példa.* Legyen $H = \{0 < x < 1 : x \epsilon \mathbb{Q}\}$.
Ebben a halmazban belső pont NINCS. Hiszen például az $1/2$ pontnak nem tudunk kijelölni olyan $(1/2 - \varepsilon, 1/2 + \varepsilon)$ környezetét, amire teljesülne, hogy $(1/2 - \varepsilon, 1/2 + \varepsilon) \subseteq H$, mert bármely kicsi intervallumban lesznek racionális és irracionális számok is. Ezért nincs olyan $(1/2 - \varepsilon, 1/2 + \varepsilon)$ intervallum, melyben csak racionális számok lennének. Tehát a halmaz határpontjai

$$\partial H = \{x : \ 0 \leq x \leq 1\} = [0, \ 1].$$

1.4. Néhány alap-egyenlőtlenség

1.4.1. Háromszög egyenlőtlenség

1.1. Állítás. *Tetszőleges a, b valós számokra*

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Bizonyítás. Abból a triviális egyenlőtlenségből indulunk ki, hogy

$$\pm a \leq |a|, \qquad \pm b \leq |b|.$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} a+b &\leq |a|+|b| \\ -a-b &\leq |a|+|b|, \end{aligned}$$

és ebből az állítás következik.

Megjegyzés. Az elnevezés vektorokra utal, ott valóban egy háromszög három oldaláról van szó.

1.2. Következmény. *Tetszőleges a, b valós számokra*

$$||a|-|b|| \leq |a-b|.$$

Bizonyítás. Az állítás azon múlik, hogy

$$|a| \leq |a-b|+|b|,$$

azaz

$$|a|-|b| \leq |a-b|.$$

1.3. Következmény. *(Általános eset.) Adottak az $a_1, a_2, ..., a_n$ valós számok, akkor*

$$|a_1+...+a_n| \leq |a_1|+...+|a_n|,$$

azaz

$$|\sum_{k=1}^{n} a_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Bizonyítás. Teljes indukcióval, könnyen látható.

1.3. Tétel. *(Bernoulli egyenlőtlenség.) Tetszőleges $n \epsilon \mathbb{N}$ természetes szám és $h \geq -1$ valós szám esetén teljesül az alábbi összefüggés:*

$$(1+h)^n \geq 1+hn.$$

A fenti kifejezésben egyenlőség akkor és csakis akkor teljesül, ha $n=0$ vagy $n=1$ vagy $h=0$.

Bizonyítás. $h = 0$ esetén egyenlőség van.

$h \neq 0$ esetén teljes indukcióval látjuk be az állítást.

1. Ha n=1 akkor
$$(1+h)^1 = 1+h,$$
tehát az állítás igaz.

2. Tegyük fel, hogy valamely n-re igaz:
$$(1+h)^n \geq 1+hn,$$
majd tekintsük az egyenlőtlenség baloldalát $n+1$-re:
$$(1+h)^{n+1} = (1+h)^n(1+h) \geq (1+nh)(1+h) = 1+(n+1)h+nh^2 \geq 1+(n+1)h.$$
A fenti átalakítások során felhasználtuk az indukciós feltevést és elhagytuk az nh^2 nemnegatív tagot.

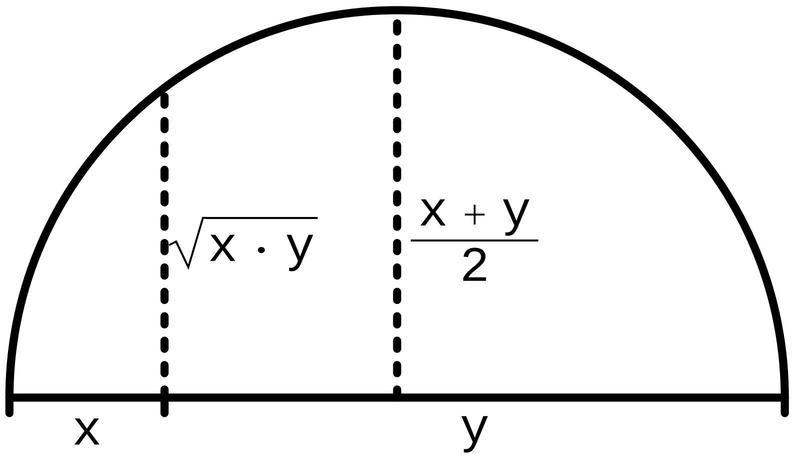
1.4.2. Számtani és mértani közép

Tekintsünk két nemnegatív valós számot, $x, y \geq 0$ Ezek *számtani közepe* (számtani átlaga)
$$A = \frac{x+y}{2},$$
és *mértani közepe* (mértani átlaga)
$$G = \sqrt{xy}.$$

1.2. Állítás. *Tetszőleges $x, y \geq 0$ valós számok esetén*
$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy},$$
és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x = y$.

Az állítás szemléletes módon igazolható a 1.2. ábra alapján, **HF**.

A fenti állítást analitikus eszközökkel általános esetben látjuk be.



1.2. ábra. A számtani és mértani közép geometriai ábrázolása

1.4. Tétel. *Legyenek* $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ *valós számok. Ezek számtani átlaga (más elnevezéssel számtani közepe)*

$$A_n := \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

és mértani átlaga (vagy mértani közepe)

$$G_n := \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}.$$

Ekkor

$$A_n \geq G_n \qquad \text{minden } n-\text{re}$$

és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

1.1. Lemma. *Legyen* $n \geq 2$ *adott természetes szám. Legyenek* $x_k \geq 0$, $k = 1, 2, \ldots n$ *olyan számok, amelyek közt van legalább kettő különböző és*

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = 1.$$

Ekkor

$$x_1 x_2 \ldots x_n < 1.$$

Bizonyítás. Teljes indukcióval látjuk be a lemmát.

1. Ha $n = 2$, akkor a lemma állítása igaz, hiszen a két szám

$$x_1 = 1 + t, \qquad x_2 = x - t, \qquad t > 0,$$

és ezekre a számokra

$$(1 - t)(1 + t) = 1 - t^2 < 1.$$

2. Tegyük fel hogy valamely rögzített n-re igaz az állítás. Tekintsünk $n + 1$ db számot, melyek számtani átlaga 1, és ezeket írjuk az alábbi alakba:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + t_1 \\ x_2 &= 1 + t_2 \\ &\vdots \\ x_n &= 1 + t_n \\ x_{n+1} &= 1 + t_{n+1} \end{aligned}$$

Ekkor a $t_1, \ldots t_{n+1}$ számok közt van pozitív es negatív is, mert összegük 0 és nem mind egyforma. Feltehető például, hogy $t_n < 0 < t_{n+1}$. Nézzük az $n + 1$ tényezős szorzatot:

$$x_1 x_2 \ldots x_{n-1} x_n x_{n+1} = x_1 x_2 \ldots x_{n-1}(1 + t_n)(1 + t_{n+1}) <$$

$$< x_1 x_2 \ldots x_{n-1}(1 + t_n + t_{n+1}),$$

ahol az utolsó tényezőből elhagytuk a $t_n t_{n+1} < 0$ tagot. A szorzat utolsó tényezőjét jelölje $x_n^* = 1 + t_n + t_{n+1}$. Ekkor egy n tényezős szorzatunk van, a tényezők összege:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + 1 + t_n + t_{n+1} = (n-1) + t_1 \ldots + t_{n-1} + 1 + t_n + t_{n+1} = n.$$

Tehát adott n db szám, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n^*$, melyek átlaga 1. Ha az így kapott számok egyformák, akkor szorzatuk $= 1$. Ha nem egyformák, akkor az indukciós feltevés miatt szorzatuk< 1.

Ezek után megfogalmazhatjuk az fenti lemmát kicsit általánosabban:

1.2. Lemma. *Legyenek* $x_k \geq 0$, $k = 1, \ldots n$ *olyan számok, amelyekre*

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = 1.$$

Ekkor

$$x_1 x_2 \ldots x_n \leq 1.$$

A Tétel bizonyítása. Ha adottak az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok, akkor legyen

$$K = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n},$$

és legyenek

$$x_k = \frac{a_k}{K}, \qquad k = 1, \ldots n.$$

Ekkor

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{K} = n,$$

ezért

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = 1,$$

így alkalmazhatjuk ezekre a számokra a 1.2. lemmát. Tehát

$$x_1 x_2 \ldots x_n \leq 1,$$

azaz

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{K^n} \leq 1,$$

s ezt az egyenlőtlenséget átrendezve kapjuk a Tétel állítását:

$$\prod_{k=1}^{n} a_k \leq \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} \right)^n.$$

2. fejezet

Sorozatok, végtelen sorok

2.1. Számsorozatok

2.1.1. Alapfogalmak

2.1. Definíció. *Számsorozaton egy olyan hozzárendelést értünk, melyben minden $n \epsilon \mathbb{N}$ természetes számhoz hozzárendelünk egy valós számot. Az (a) sorozat n-dik elemét a_n jelöli, az egész sorozatot (a_n)-nel jelöljük.*

2.2. Definíció. *Az (a_n) sorozat korlátos ha létezik K szám, hogy $|a_n| < K$ minden $n \epsilon \mathbb{N}$ esetén.*

2.3. Definíció. *Az (a_n) sorozat monoton növő, ha $n < m$ esetén $a_n \leqq a_m$. (Nagyobb indexhez nem kisebb elem tartozik.) Az (a_n) sorozat monoton fogyó, ha $n < m$ esetén $a_n \geqq a_m$ (nagyobb indexhez nem nagyobb elem tartozik.)*

2.1.2. Határérték

Arra leszünk kíváncsiak, hogy n növelésével mi történik az a_n számokkal.

Példa. Egy $a \epsilon \mathbb{R}$ irracionális szám esetén legyen a_n az első n db jegy a végtelen tizedestört felírásában. Ekkor a_n "egyre közelebb kerül" a-hoz. Ezt így jelölhetjük: $a_n \to a$.

Mielőtt pontosan definiálnánk a határértéket, egy-két példát tekintünk.

1. *Példa.* Legyen $a_n = 1/n$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges és a $(-\varepsilon,\ \varepsilon)$ intervallumot tekintjük. Ekkor megadható egy N küszöbindex, amire $a_N \epsilon (-\varepsilon,\ \varepsilon)$ éspedig ha

$$N > [1/\varepsilon] + 1,$$

akkor

$$\frac{1}{N} < \frac{1}{[1/\varepsilon] + 1} < \varepsilon$$

sőt minden $n > N$-re $a_n \epsilon (-\varepsilon,\ \varepsilon)$, tehát $a_n \to 0$.

2. *Példa.* Legyen

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n},$$

azaz a sorozat

$$-1;\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ -\frac{1}{5};\ldots.$$

Ekkor is igaz, hogy $a_n \to 0$ mert minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik N küszöbindex, amire teljesül, hogy ha $n > N$ esetén $|a_n| < \varepsilon$.

3. *Példa.* Legyen

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2n} & \text{ha} \quad n = 2k \\ \\ \dfrac{1}{n} & \text{ha} \quad n = 2k+1 \end{cases}.$$

A sorozat elemei

$$a_1 = 1;\ a_2 = \frac{1}{4};\ a_3 = \frac{1}{3};\ a_4 = \frac{1}{8};\ a_5 = \frac{1}{5};\ldots$$

Most is igaz, hogy $a_n \to 0$

4. *Példa.* Legyen

$$a_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Ekkor a_n-nek az 1-től való eltérése csökken és tart a 0-hoz. Így $a_n \to 1$.

5. *Példa.* Legyen $p > 0$ tetszőleges rögzített szám és legyen $a_n = \sqrt[n]{p}$, hova tart a sorozat? Ha például $p = 2$ akkor a sorozat

$$a_1 = 2,\ a_2 = \sqrt{2},\ a_3 = \sqrt[3]{2},\ldots$$

3 eset van:

1. Ha $p = 1$, ekkor $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = 1$, így $a_n \to 1$.

2. Ha $p > 1$, ekkor $\sqrt[n]{p} > 1$, ez felírható összegként:

$$\sqrt[n]{p} = 1 + h_n,$$

ahol $h_n > 0$. Így $p = (1+h_n)^n$, és a Bernoulli egyenlőtlenséget alkalmazva

$$p = (1+h_n)^n \geq n\ h_n + 1,$$

azaz átrendezve

$$h_n \leqq \frac{p-1}{n}.$$

Mivel
$$\frac{p-1}{n} \to 0,$$
ezért $h_n \to 0$. Így most is $\sqrt[n]{p} \to 1$.

3. Ha $p < 1$, akkor $1/p > 1$, tehát a 2. esetnél leírtak miatt
$$\sqrt[n]{\frac{1}{p}} \to 1$$
is teljesül. Mivel
$$\sqrt[n]{\frac{1}{p}} = \frac{1}{\sqrt[n]{p}},$$
ezért $\sqrt[n]{p} \to 1$.

2.4. Definíció. *Legyen (a_n) egy sorozat. Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat konvergens, és határértéke az A szám, ha ez rendelkezik a következő tulajdonsággal: minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $N = N(\varepsilon)$ (egy ε-tól függő N küszöbindex) melyre minden $n > N$ esetén*
$$|a_n - A| < \varepsilon.$$
Ezt így jelöljük
$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

2.1. Állítás. *Ha egy sorozatnak van határértéke, akkor a határérték egyértelmű.*

Bizonyítás. Indirekt úton. Tegyük fel, hogy két szám is rendelkezik a fenti tulajdonsággal, jelölje ezeket $A < B$. Válasszuk meg az ε-t úgy, hogy $\varepsilon < (B-A)/2$ legyen. Ekkor az $(A-\varepsilon,\ A+\varepsilon)$ és a $(B-\varepsilon,\ B+\varepsilon)$ intervallumok diszjunktak, (nincs közös elemük). ELLENTMONDÁS

6. *Példa.* Legyen
$$a_n = \frac{n^2-1}{n^2+n+1}.$$
Ekkor
$$a_n = \frac{n^2+n+1-n-2}{n^2+n+1} = 1 - \frac{n+2}{n^2+n+1} = 1 - r_n.$$

Mivel

$$0 < r_n = \frac{n+2}{n^2+n+1} < \frac{2n}{2n^2} = \frac{1}{n},$$

és $1/n \to 0$ ezért $(a_n - 1) \to 0$, azaz $a_n \to 1$.

2.5. Definíció. *Ha (a_n) nem konvergens, akkor divergensnek nevezzük.*

2.6. Definíció. *Az (a_n) sorozat a $+\infty$-be divergál ("a_n minden határon túl nő"), ha minden $K \epsilon \mathbb{R}$ korláthoz megadható $N = N(K)$ küszöbindex, hogy ha $n > N$ akkor $a_n > K$. Ezt így jelöljük*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

Hasonlóan, az (a_n) sorozat a $-\infty$-hez divergál, ha minden K-hoz létezik $N = N(K)$ küszöbindex, melyre ha $n \geq N(K)$, akkor $a_n < K$. Jele

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Egy másik fajta divergencia, amikor a sorozat elemei több pont körül torlódnak. Például, ha

$$a_n = (-1)^n,$$

akkor ennek a sorozatnak elemei:

$$-1;\ 1;\ -1;\ 1;\ -1;\ 1;\ldots.$$

Nyilván nem konvergens.

Definíció (Előző definíció átfogalmazása, a határérték általános definíciója) Azt mondjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A,$$

ha A-nak tetszőleges U környezetéhez megadható egy $N = N(U)$ küszöbindex, melyre minden $n > N$ esetén $a_n \epsilon U$.

Ez a definíció alkalmazható $A \epsilon \mathbb{R}$ vagy $A = \pm\infty$ esetén is.

Megjegyzés. Emlékeztetünk rá, hogy a környezetet definíciója szerint véges A mellett $U = (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$, így

$$a_n \epsilon U \iff |a_n - A| < \varepsilon.$$

Ha $A = +\infty$ akkor ennek a környezetei a $U = (K, \infty)$ alakú jobbról végtelen intervallumok. Ekkor

$$a_n \epsilon U \quad \Longleftrightarrow \quad a_n > K.$$

Megjegyzés. Konvergens sorozatból akárhány elemet elhagyunk, az konvergens marad, és ugyanahhoz a számhoz fog tartani, mint az eredeti.

Példa. Ilyen sorozat lehet $b_n = a_{2n}$ vagy $b_n = a_{n+100}$

2.1.3. Konvergens sorozatok tulajdonságai

2.2. Állítás. *Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy konvergens sorozatot, legyen (a_n) konvergens,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

Ekkor $\varepsilon = 1$-hez is létezik N, hogy ha $n \geqq N$ akkor $|a_n - A| < 1$, azaz $A - 1 < a_n < A + 1$. Legyen

$$m = \min\{a_n : \ n < N\}, \qquad M = \max\{a_n : \ n < N\}.$$

Más szóval, legyen m a fenti intervallumon kívül eső elemek közül a legkisebb, és legyen M a kívül eső elemek közül a legnagyobb. Legyen továbbá

$$k = \min\{m, A - 1\}, \qquad K = \max\{M, A + 1\}.$$

Ekkor

$$k \leqq a_n \leqq K, \qquad n \epsilon \mathbb{N}.$$

Az eredeti definícióra hivatkozva, ha

$$L = \max(|k|, |K|),$$

akkor

$$|a_n| \leq L, \qquad n \epsilon \mathbb{N}.$$

Megjegyzés. Az állítás fordítva nem igaz: ha egy sorozat korlátos, nem biztos, hogy konvergens. Például az $a_n = (-1)^n$ sorozat korlátos, de nem konvergens.

2.3. Állítás. *1. Ha egy (a_n) sorozat monoton növő és felülről korlátos, akkor konvergens.*

2. Ha egy (a_n) sorozat monoton fogyó és alulról korlátos, akkor konvergens.

Bizonyítás. Az állítás két része nyilván ekvivalens. Belátjuk például az 1. részt.

Tekintsük a következő halmazt:

$$H = \{a_n \ : \ n \epsilon \mathbb{N}\}.$$

Ekkor a H halmaz felülről korlátos, és létezik $\sup(H) = A$. Ez azt jelenti, hogy minden $\varepsilon > 0$-ra $A - \varepsilon$ nem felső korlát, tehát létezik H-ban ennél nagyobb elem, például $a_N > A - \varepsilon$. A monotonitás miatt teljesül az is, hogy $a_n \geqq a_N$ ha $n > N$ azaz $a_n > A - \varepsilon$. Mivel $a_n \leqq A$ minden n-re teljesül, így

$$A - \varepsilon < a_n \leqq A < A + \varepsilon \qquad \text{ha} \quad n > N.$$

Példa. Gyakorlatokon beláttuk, hogy

$$(1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}, \qquad n \epsilon \mathbb{N}$$

és hogy

$$(1 + \frac{1}{n})^n < 4, \qquad n \epsilon \mathbb{N}.$$

Ez azt jelenti, hogy az

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

sorozat monoton növő és felülről korlátos, tehát konvergens.

2.7. Definíció. *Az e - Euler-féle számot - úgy definiáljuk, mint a fenti sorozat határértéke:*

$$e := \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n.$$

($e \approx 2,718281...$, egy irracionális szám.)

2.1.4. A határérték alaptulajdonságai

2.4. Állítás. *Legyen adott két konvergens sorozat* (a_n) *és* (b_n),

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = B.$$

Ekkor

1. *Tetszőleges* $c \in \mathbb{R}$ *esetén* (ca_n) *is konvergens, és*

$$\lim_{n\to\infty} ca_n = cA.$$

2. $(a_n + b_n)$ *is konvergens, és*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B.$$

3. $(a_n b_n)$ *is konvergens, és*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = AB.$$

Bizonyítás.

1. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Be kell látnunk, hogy

$$|ca_n - cA| < \varepsilon$$

teljesül bizonyos n indextől kezdve. $c = 0$ esetén az állítás triviális. Ha $c \neq 0$, akkor az (a_n) sorozatot tekintve az $\varepsilon/|c|$ számhoz létezik N küszöbindex, melyre minden $n \geq N$ esetén

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{|c|}.$$

Így ha $n \geq N$, akkor

$$|ca_n - cA| = |c||a_n - A| < |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon.$$

2. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám esetén $\varepsilon/2$-hez $\exists N_1$, hogy ha $n \geq N_1$, akkor

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Hasonlóan $\exists N_2$, hogy ha $n \geq N_2$, akkor

$$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Így $N = \max(N_1, N_2)$ választással $n \geq N$ esetén

$$|a_n + b_n - (A + B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

3. A tulajdonság bizonyításához először egy lemmát látunk be.

2.1. Lemma. *Ha*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = B$$

akkor $(a_n b_n)$ *is konvergens, és*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = 0$$

Bizonyítás. Mivel a (b_n) sorozat konvergens, ezért korlátos is, tehát létezik egy olyan $K \epsilon \mathbb{R}$, $K > 0$, hogy

$$|b_n| < K, \qquad \forall n \epsilon \mathbb{N}.$$

Másrészt tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik $N \epsilon \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy

$$|a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{K}, \qquad \forall n \geq N.$$

A fenti egyenlőtlenségeket felhasználva azt kapjuk, hogy:

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n|\,|b_n| < \frac{\varepsilon}{K} K = \varepsilon.$$

Ebből pedig következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = 0.$$

A 3. tulajdonság igazolása. Írjuk fel az alábbi azonosságot:

$$a_n b_n - AB = a_n(b_n - B) + B(a_n - A.)$$

A jobboldal mindkét tagja az előző lemma alapján 0-hoz tart.

2.5. Állítás. *(Alaptulajdonságok folytatása) Adott két konvergens sorozat* (a_n) *és* (b_n),

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = B.$$

Ekkor

4.

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |A|.$$

5. *Tegyük fel, hogy* $A \neq 0$ *és* $a_n \neq 0$. *Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{A}.$$

5.* *Az előző feltételekkel*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{B}{A}.$$

Bizonyítás.

4. A háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$||a_n| - |A|| \leq |a_n - A|.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor $\exists N$, hogy minden $n \geq N$ esetén

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

és emiatt

$$||a_n| - |A|| \leq \varepsilon.$$

5. Feltehetjük, hogy $A > 0$ és $a_n > 0$. Felhasználjuk, hogy

$$|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{A}| = \frac{|a_n - A|}{a_n A}.$$

Először a nevezőt becsüljük. Az $\varepsilon = A/2$-höz létezik N_1, hogy ha $n > N_1$ akkor

$$a_n \epsilon (A - \frac{A}{2}, A + \frac{A}{2}),$$

azaz

$$a_n > \frac{A}{2}.$$

Az $\dfrac{\varepsilon}{2/A^2}$-hez is létezik N_2, melyre $n > N_2$ esetén

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{\frac{2}{A^2}}.$$

Legyen $N = \max(N_1, N_2)$. Ekkor $n \geq N$ esetén az eredeti becslést folytatva

$$\frac{|a_n - A|}{|a_n||A|} \leq |a_n - A|\frac{1}{A}\frac{1}{\frac{A}{2}} = |a_n - A|\frac{2}{A^2} \leq \frac{\varepsilon}{\frac{2}{A^2}}\frac{2}{A^2} = \varepsilon$$

Példa. Az (a_n) sorozatot rekurzívan definiáljuk. Legyen

$$\begin{aligned} a_1 &:= 1 \\ a_{n+1} &:= \frac{a_n^2 + 4}{4}, \quad n \geq 1 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Először belátjuk, hogy monoton növő, azaz $a_n \leq a_{n+1}$ teljesül minden n-re. Valóban, teljes indukcióval:

1. $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{5}{4}$ ezért $a_1 < a_2$ teljesül.

2. Tegyük fel, hogy beláttuk már, hogy $a_n \geq a_{n-1}$.A sorozat nyilván pozitív tagú. Ekkor

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 4}{4} \geq \frac{a_{n-1}^2 + 4}{4} = a_n$$

az indukciós feltétel miatt.

Belátjuk azt is, hogy a sorozat korlátos: igazoljuk, hogy $a_n < 2$ teljesül minden n-re. Ezt is teljes indukcióval bizonyíjuk.

1. $n = 1$-re $a_1 = 1 < 2$, így igaz.

2. Tegyük fel hogy $a_n < 2$ és a sorozat pozitív tagú. Ekkor

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 4}{4} < \frac{4 + 4}{4} = 2.$$

A sorozat monoton növő és felülről korlátos, ezért konvergens. Legyen

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n$$

a határértéke. Az eredeti rekurziós (2.1) egyenletben határértéket véve azt kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2+4}{4} = \frac{A^2+4}{4},$$

ezért

$$A = \frac{A^2+4}{4}$$

tehát $A = 2$.

2.1.5. Rész-sorozatok

Adott (a_n) sorozat. Egy *index-sorozat*ot úgy definiálunk, hogy minden $k \epsilon \mathbb{N}$ természetes számhoz hozzárendelünk egy n_k-val jelölt indexet, hogy

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1}, \ldots$$

teljesüljön. A *részsorozat* elemei $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$ lesznek.

Pl. (a_{2n}) a páros indexű tagokból álló részsorozat: $a_2, a_4, a_6, \ldots$.

2.1. Tétel. *Minden sorozatnak van monoton részsorozata.*

Bizonyítás. A sorozat egy a_n elemét *csúcs*nak nevezzük, ha

$$a_n \geq a_m \quad \forall m > n,$$

azaz az utána következő elemek közt nincs nála nagyobb. Két esetet különböztetünk meg.
1. Ha végtelen sok csúcs van, akkor legyenek ezek indexei $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$. Ekkor az (a_{n_k}) részsorozat monoton fogyó.
2. Ha csak véges sok csúcs van, akkor legyen az utolsó csúcs indexe n, ha egyáltalán nincs csúcs, akkor $n = 0$. Definiáljuk n_1-t, mint $n_1 := n + 1$. Ekkor, mivel a_{n_1} nem csúcs, ezért van nála nagyobb elem, $a_{n_2} > a_{n_1}$, ahol $n_2 > n_1$. Hasonlóan, mivel a_{n_2} nem csúcs, ezért van a_{n_3}, melyre $n_3 > n_2$ és $a_{n_3} > a_{n_2}$. Így tudunk monoton növő részsorozatot konstruálni.

2.2. Tétel. *Bolzano-Weierstrass tétel. Minden korlátos* (a_n) *sorozatnak van konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Az előző tétel szerint van (a_{n_k}) monoton részsorozat, amely szintén korlátos. Ezért konvergens is.

2.1.6. Cauchy sorozatok

2.8. Definíció. *Azt mondjuk, hogy* (a_n) *eleget tesz a Cauchy feltételnek, ha minden* $\varepsilon > 0$*-hoz* $\exists N$ *küszöbindex,* $N = N(\varepsilon)$*, melyre teljesül, hogy minden* $n, m \geq N$ *esetén* $|a_n - a_m| < \varepsilon$*. Ha egy sorozat kielégíti a Cauchy feltételt, akkor Cauchy sorozatnak nevezzük.*

2.3. Tétel. *Ha* (a_n) *konvergens, akkor Cauchy sorozat.*

Bizonyítás. Legyen
$$\lim_{n\to\infty} a_n = A,$$
és legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor az $\varepsilon/2$ számhoz létezik egy N küszöbindex, melyre $n \geq N$, $m \geq N$ esetén
$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Ekkor a háromszögegyenlőtlenség miatt
$$|a_n - a_m| = |(a_n - A) + (A - a_m)| \leq |a_n - A| + |a_m - A| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2.4. Tétel. *(Az előző Tétel megfordítása) Ha* (a_n) *Cauchy sorozat, akkor* (a_n) *konvergens.*

Bizonyítás. Két segédállítást (lemmát) fogunk belátni a bizonyítás során.

2.2. Lemma. *Ha* (a_n) *eleget tesz a Cauchy kritériumnak, akkor korlátos.*

Bizonyítás. Az $\varepsilon = 1$-hez létezik N index, melyre minden $n \geq N$ esetén $a_n \epsilon (a_N - 1, a_N + 1)$, Az intervallumon kívül csak véges sok eleme van a sorozatnak, ezért van legnagyobb és legkisebb közöttük. Tehát
$$K = \max\{|a_N| + 1, |a_1|, \ldots, |a_{N-1}|\}$$
korlátja a sorozatnak.

2.3. Lemma. *Ha egy (a_n) Cauchy sorozatnak van konvergens (a_{n_k}) részsorozata, és*

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A,$$

akkor a sorozat is konvergens, és

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor a részsorozat konvergenciája miatt létezik N_1 index, melyre

$$|a_{n_k} - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{ha } n_k > N_1.$$

Mivel (a_n) Cauchy sorozat, ezért létezik N_2 index, melyre

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{ha } n, m > N_2.$$

Legyen $N = \max\{N_1, N_2\}$ Ekkor minden $n \geq N$ esetén létezik $n_k \geq n \geq N$. Így

$$|a_n - A| = |(a_n - a_{n_k}) + (a_{n_k} - A)| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

A Tétel bizonyítása. Az (a_n) Cauchy-sorozat, tehát korlátos. A Bolzano-Weierstrass tétel miatt létezik (a_{n_k}) konvergens részsorozat, és ekkor az eredeti sorozat is konvergens.

2.1. Következmény. (a_n) *konvergens* $\Longleftrightarrow$ (a_n) *Cauchy sorozat.*

Példa. Legyen

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Becsüljük meg az n-dik és $2n$-dik tag különbségét:

$$a_{2n} - a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$a_{2n} - a_n > \frac{1}{2} \qquad \forall n,$$

ezért például az $\varepsilon = 1/2$ esetén sem teljesül a Cauchy kritérium, tehát (a_n) *nem konvergens.*

2.1.7. Konvergens sorozatok további tulajdonságai

2.6. Állítás. *(Konvergencia monotonitása) Tegyük fel, hogy az* (a_n) *és* (b_n) *sorozatok konvergensek, jelölje*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = B.$$

Ha

$$a_n < b_n, \qquad \forall n,$$

akkor $A \leq B$.

Bizonyítás. Triviális.

Megjegyzés. Megjegyezzük, hogy bár a feltételben szigorú egyenlőtlenség áll, határértékben egyenlőség is előfordulhat. Példaként nézhetjük az

$$a_n = \frac{1}{n^2} \;<\; b_n = \frac{1}{n}$$

sorozatokat. Nyilván

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n} \qquad n > 1,$$

és határértékben

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

2.5. Tétel. *(Rendőr-elv) Tegyük fel, hogy az* (a_n) *és* (b_n) *sorozatok közrefognak egy harmadik sorozatot:*

$$a_n \leq c_n \leq b_n \qquad \forall n \epsilon \mathbb{N}.$$

Tegyük fel, hogy (a_n) *és* (b_n) *konvergens sorozatok ugyanazzal a határértékkel*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = A.$$

Ekkor (c_n) *is konvergens, és*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = A.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor létezik N_1 küszöbindex, melyre

$$|a_n - A| < \varepsilon \quad \text{ha } n \geq N_1,$$

speciálisan $a_n > A - \varepsilon$. Hasonlóan $\exists N_2$, melyre

$$|b_n - A| < \varepsilon \quad \text{ha } n \geq N_2,$$

speciálisan $b_n < A + \varepsilon$. Ekkor $n \geq \max(N_1, N_2)$ esetén

$$A - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < A + \varepsilon,$$

amiből a konvergencia következik.

Megjegyzés. A fenti tételek akkor is igazak, ha a feltételek nem minden $n \epsilon \mathbb{N}$-re teljesülnek, hanem csak egy bizonyos N-től kezdve.

Példa. Legyen $a_n = \sqrt[n]{n}$. Belátjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Azt tudjuk, hogy $1 < a_n$, minden $n > 1$-re. Ekkor

$$1 < a_n = \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \ldots \cdot 1} \leq \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n} + 1 \ldots + 1}{n} =$$

$$= \frac{2\sqrt{n}}{n} + \frac{n-2}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{n-2}{n} < \frac{2}{\sqrt{n}} + 1.$$

A számtani és mértani közép közti egyenlőséget használtuk. Azt kaptuk, hogy

$$1 < a_n < \frac{2}{\sqrt{n}} + 1.$$

Legyen: $b_n \equiv 1$ (minden eleme 1) és $c_n = 2/\sqrt{n} + 1$. Mindkét sorozat határértéke 1, és $b_n < a_n < c_n$ minden n-re. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Hasonlóan belátható: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$.

Példa. (Az előző példa következménye.) Legyen $p > 0$ tetszőleges, $a_n := \sqrt[n]{p}$, láttuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$, most másképp is belátjuk. Tetszőleges $p > 0$ esetén igaz, az $1/n < p < n$ bizonyos N után (azaz $\exists N$ index, hogy $1/n < p < n$, minden $n > N$ esetén). Ekkor:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} < \sqrt[n]{p} < \sqrt[n]{n},$$

és emiatt

$$1 \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} \leq 1.$$

2.1.8. Nullsorozatok

2.9. Definíció. *Az (a_n) konvergens sorozatot nullsorozatnak nevezzük, ha határértéke 0, azaz minden $\varepsilon > 0$-hoz $\exists N = N(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy minden $n \geq N$-re $|a_n| < \varepsilon$.*

2.7. Állítás. *1. (a_n) konvergens és határértéke A azzal ekvivalens, hogy $b_n = a_n - A$ nullsorozat.*

2. Tegyük fel, hogy (a_n) nullsorozat, (b_n) korlátos sorozat. Ekkor az $(a_n b_n)$ is nullsorozat, azaz

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0.$$

3. Tegyük fel, hogy (a_n) divergens és $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Legyen

$$b_n := \begin{cases} \dfrac{1}{a_n}, & \text{ha} \quad a_n > 0 \\ \\ 0, & \text{ha} \quad a_n \leq 0 \end{cases}$$

Ekkor $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, azaz (b_n) nullsorozat.

4. (a_n) pontosan akkor nullsorozat ha $(|a_n|)$ nullsorozat.

5. Legyen (a_n) divergens sorozat, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$. Legyen (b_n) alulról korlátos sorozat, melynek alsó korlátja pozitív. Ekkor:

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \infty.$$

Bizonyítás.

2. Ha (b_n) korlátos, akkor $|b_n| \leq K$, minden n-re. Tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén a ε/K-hoz létezik N: minden $n \geq N$,

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{K}.$$

Ekkor

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq \frac{\varepsilon}{K} K = \varepsilon.$$

3. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $a_n \to +\infty$, ezért $K = 1/\varepsilon$-hoz $\exists N = N(K)$ küszöbindex, hogy minden $n \geq N$-re $a_n \geq K(>0)$. Ekkor
$$|b_n| = \frac{1}{a_n} \leq \frac{1}{K} = \varepsilon$$

5. Legyen (b_n) egy pozitív alsó korlátja k:
$$|b_n| = b_n \geq k > 0$$
Legyen $K \epsilon \mathbb{R}$ tetszőleges szám, $(K > 0)$. Ekkor K/k-hoz $\exists N$ küszöbindex, ha $n \geq N$, akkor $a_n \geq K/k$. Ekkor:
$$a_n b_n \geq \frac{K}{k} k = K$$

2.8. Állítás. *(Összehasonlító kritériumok)*

1. *Tegyük fel, hogy (a_n) nullsorozat, (b_n) olyan sorozat, melyre $(|b_n|) \leq (|a_n|)$ minden n-re (rögzített N mellett minden $n > N$-re). Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$*

2. *Tegyük fel, hogy (a_n) ∞-be divergál, azaz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, és $\exists N$ index, ha $n \geq N$, akkor $b_n \geq a_n$. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.*

Megjegyzés. A $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n =$ "∞" $\cdot$ "0" típusú határérték "bármi" lehet ($-\infty$ nem).

Emlékeztetünk arra, hogy
$$\lim_{n\to\infty} p^n = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad |p| < 1 \\ 1, & \text{ha} \quad p = 1 \\ \infty, & \text{ha} \quad p > 1 \\ \text{divergens}, & \text{ha} \quad p \leq -1 \end{cases}$$

1\. *Példa.* Legyen $a_n = np^n$. Belátjuk, hogy ha $0 < p < 1$, akkor
$$\lim_{n\to\infty} np^n = 0.$$

Átírjuk a sorozat elemeit ilyen alakba:
$$a_n = np^n = (\sqrt[n]{n}p)^n.$$

Mivel $\sqrt[n]{n}$ tart az 1-hez, ezért $\exists N$ küszöbindex, hogy ha $n \geq N$, akkor $\sqrt[n]{n} < \frac{1}{p}$. Ezekre az n-ekre

$$|\sqrt[n]{n}p| < \frac{1}{p}p = 1.$$

Tehát létezik $0 < q < 1$, melyre

$$\sqrt[n]{n}p < q < 1.$$

Ezért $0 < a_n < q^n$, ha $n \geq N$, így a rendőrelv alapján $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

1*. *Példa.* Legyen $k \epsilon \mathbb{N}$ tetszőleges természetes szám, és tekintsük az $a_n = n^k p^n$ sorozatot, $0 < p < 1$. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Bizonyítás. Az előző esethez hasonlóan $a_n = (\sqrt[n]{n^k}p)^n$. Mivel $\sqrt[n]{n} \to 1$, ezért $\sqrt[n]{n^k} \to 1$, és emiatt $\sqrt[n]{n^k} < \frac{1}{p}$, ha $n > N$. A bizonyítás ugyanúgy megy, mint az előző esetben.

2. *Példa.* Legyen

$$a_n = \frac{3^n}{n!}.$$

Belátjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Legyen $n > 3$. Ekkor

$$a_n = \frac{3^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} = (\frac{3}{1}\frac{3}{2}\frac{3}{3})\frac{3}{4} \ldots \frac{3}{n} \leq \frac{9}{2}(\frac{3}{4})^{n-3} \to 0.$$

2*. *Példa.* Legyen $a > 0$ tetszőleges.

$$a_n = \frac{a^n}{n!},$$

ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ most is igaz.

2.1.9. Számtani átlag-sorozatok

2.9. Állítás. *Adott* (a_n) *nullsorozat. Legyen*

$$A_n = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 0$.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

$$|A_n| = \frac{1}{n}|\sum_{k=1}^{n} a_k| \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Az $\varepsilon/2$-höz létezik N küszöbindex, hogy ha $n \ge N$, akkor $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ezekre az n indexekre

$$|A_n| \le \frac{|a_1| + \ldots + |a_N| + |a_{N+1}| + \ldots + |a_n|}{n} \le \frac{N}{n}K + \frac{\varepsilon}{2}\frac{n-N}{n} < \frac{N}{n}K + \frac{\varepsilon}{2}$$

ahol $|a_n| \le K$ felső korlát. Ha

$$n \ge \frac{2NK}{\varepsilon} = N_1,$$

akkor

$$\frac{N}{n}K \le \frac{\varepsilon}{2},$$

tehát, ha $n \ge N_1$, akkor

$$|A_n| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ezzel az állítást beláttuk.

Megjegyzés. Az állítás megfordítása nem igaz!

$$A_n \to 0 \quad \not\Rightarrow \quad a_n \to 0.$$

Ellenpélda: Ha $a_n = (-1)^n$, akkor

$$A_n = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad n = 2k \\ \frac{1}{n}, & \text{ha} \quad n = 2k+1 \end{cases},$$

tehát $A_n \to 0$, bár az eredeti sorozat divergens volt.

2.2. Következmény. *Legyen (a_n) konvergens, $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Ekkor a számtani átlag sorozatra $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.*

Bizonyítás. Felhasználjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ azzal ekvivalens, hogy $(a_n - A)$ nullsorozat. Legyen ugyanis $b_n := a_n - A$. Ennek a sorozatnak a számtani átlag sorozata

$$B_n = \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} = \frac{a_1 - A + \ldots a_n - A}{n} = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - A.$$

Az előző tétel alapján

$$\lim_{n\to\infty} B_n = 0,$$

ahonnan azonnal következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A.$$

2.10. Állítás. *Legyen (a_n) pozitív tagú sorozat, és*

$$G_n := \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}$$

a mértani átlagok sorozata. Tegyük fel, hogy (a_n) nullsorozat, ekkor

$$\lim_{n\to\infty} G_n = 0.$$

Bizonyítás. A számtani-mértani közép közti egyenlőtlenség miatt

$$0 < G_n \leq A_n,$$

és mivel A_n nullsorozat, ezért G_n is az.

2.1.10. Torlódási pont

2.10. Definíció. *Legyen (a_n) egy sorozat, és $t \in \mathbb{R}$ egy valós szám. Azt mondjuk, hogy t torlódási pontja (a_n)-nek, ha t bármely környezetében végtelen sok tagja van a sorozatnak.*

Más szavakkal a torlódási pont azt jelenti, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén a $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$ intervallumban a sorozatnak végtelen sok tagja van. Lényeges különbség a határértékhez képest, hogy a határérték tetszőlges környezetén **kívül** csak véges sok tagja lehet a sorozatnak.

Példa. Tekintsük az $a_n = (-1)^n$ sorozatot. Ennek két torlódási pontja van, $t_1 = 1$ és $t_2 = -1$.

Példa. "Összefésült sorozatok". Legyen

$$a_n = \frac{1}{n}, \qquad b_n = \frac{n}{n+1}.$$

Definiáljunk egy harmadik sorozatot a következőképpen:

$$c_n = \begin{cases} a_k & \text{ha} \quad n = 2k \\ \\ b_k & \text{ha} \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

A (c_n) sorozatnak két torlódási pontja van, 0 és 1.

2.11. Állítás. *Ha az (a_n) sorozat konvergens, akkor egyetlen torlódási pontja van.*

Megjegyzés. A fenti állítás megfordítása nem igaz. Legyen a sorozat

$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{ha} \quad n = 2k+1 \\ \\ (-1)^{n/2} n & \text{ha} \quad n = 2k \end{cases}.$$

A sorozat elemei tehát

$$1, \ -2, \ \frac{1}{3}, \ 4, \ \frac{1}{5}, \ -6, \dots$$

A sorozatnak egyetlen torlódási pontja van, a 0, de nyilván nem konvergens, hiszen nem korlátos.

2.11. Definíció. *Ha a torlódási pontok halmaza felülről korlátos, akkor ennek a legkisebb felső korlátját limes superiornak nevezzük. (A torlódási pontok sup-ja). Jelölése*

$$\lim \sup(a_n) = \overline{\lim}(a_n).$$

Ha a torlódási pontok halmaza alulról korlátos, akkor ennek a legnagyobb alsó korlátját limes infimumnak nevezzük, ennek jelölése

$$\lim\inf(a_n) = \underline{\lim}(a_n).$$

2.2. Végtelen sorok

Emlékeztetünk rá, hogy *sorozat* valós számok rendezett halmaza volt. *Sor* alatt valós számok összegét értjük, ahol az összeadandók száma végtelen:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \dots.$$

Formálisan, végtelen sor alatt egy

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

alakú végtelen összeget értünk. Az a kérdés, hogy milyen értelmet tulajdoníthatunk egy ilyen végtelen összegnek.

2.2.1. Végtelen sor konvergenciája

2.12. Definíció. *A fenti végtelen sor konvergens, ha a részletösszegek sorozata*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

konvergens. Ekkor azt mondjuk, hogy a sor összege

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Példa. Legyen $a_n = \dfrac{1}{2^n}$, a végtelen sor

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots .$$

Ekkor

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\right) = 1 - \frac{1}{2^n},$$

mivel egy mértani sorozat elemeit adtuk össze. Tehát (s_n) konvergens, 1-hez tart, így

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

Példa. Legyen $a_n = (-1)^n$, ekkor a végtelen sor

$$-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots .$$

A részletösszegek sorozata:

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad n = 2k \\ \\ -1 & \text{ha} \quad n = 2k+1 \end{cases}$$

Így az s_n sorozat nem konvergens, a végtelen sor összege nem létezik.

2.13. Definíció. *Ha a részletösszegek (s_n) sorozata nem konvergens, akor azt mondjuk, hogy a végtelen sor divergens.*

Példa. Mértani (geometriai) sor . Legyen $a_n = q^{n-1}$. Kérdés, mennyi az alábbi összeg:

$$1 + q + q^2 + \ldots = ?$$

Az első n tag összege

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}, \quad \text{ha } q \neq 1.$$

Így

$$\lim s_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} & \text{ha} \quad |q| < 1 \\ \\ +\infty & \text{ha} \quad q \geq 1 \\ \\ \nexists & \text{ha} \quad q \leq -1 \end{cases} .$$

2.12. Állítás. *Ha $(\sum a_n)$ konvergens, akkor (a_n) nullsorozat.*

Bizonyítás. Legyenek

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \qquad n \geq 2.$$

Ekkor mivel

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - S_n) = 0.$$

Megjegyzés. Az állítás megfordítása nem igaz, ha (a_n) nullsorozat, akkor $(\sum a_n)$ általában nem konvergens.

Példa. Tekintsük a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

végtelen sort. A sor elemei 0-hoz tartanak. A részletösszegek sorozata

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Erről már beláttuk, hogy nem konvergens.

Példa.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} =?$$

Elemi törtekre bontva

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) =$$

$$(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1.$$

A sorozatoknál tanultakból következik, hogy a végtelen sor pontosan akkor konvergens ha (s_n) teljesíti a Cauchy-féle feltételt.

Cauchy feltétel sorokra. A $(\sum a_n)$ végtelen sor teljesíti a Cauchy feltételt, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $N = N(\varepsilon)$ küszöbindex, melyre minden $n > m \geq N$ esetén

$$|a_{m+1} + \ldots + a_n| = |\sum_{k=m+1}^{n} a_k| < \varepsilon.$$

Ez azt jelenti, hogy a N küszöbindex után akárhány elemet adunk össze, az összeg kisebb lesz, mint ε.

2.2.2. Összehasonlító kritériumok

Az alábbi két tétel azonnal következik a sorozatokra igazolt összehasonlító kritériumokból.

2.6. Tétel. *(Majoráns kritérium) Tegyük fel, hogy adott két sor, melyek elemeire teljesül, hogy $0 \le b_n \le a_n$ minden n-re. Ha $(\sum a_n)$ sor konvergens, akkor $(\sum b_n)$ is konvergens.*

Megjegyzés. az állítás úgy is igaz, ha a feltétel a következő: $\exists N \epsilon \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$-re teljesül $0 \le b_n \le a_n$.

2.7. Tétel. *(Minoráns kritérium) Tegyük fel, hogy $b_n \ge a_n$, minden n-re. Ha $(\sum a_n)$ divergens és*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty,$$

akkor $(\sum b_n)$ is divergens, és a összege $+\infty$.

Példa.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

konvergens-e? Felhasználjuk azt a becslést, hogy

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}, \qquad n \ge 2.$$

Ekkor alkalmazhatjuk a majoránskritériumot, hiszen a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$$

sor konvergens. Tehát beláttuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Megjegyzés. Láttuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

A későbbiek során be fogjuk látni, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

sor akkor konvergens, ha $\alpha > 1$.

Példa. Végtelen tizedestörtek értelmezése. Egy végtelen tizedestört a $(0,1)$ intervallumban így írható:

$$0, a_1 a_2 a_3 \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 10^{-k}, \qquad 0 \leq a_k \leq 9.$$

A fenti sort majorálni tudjuk, a

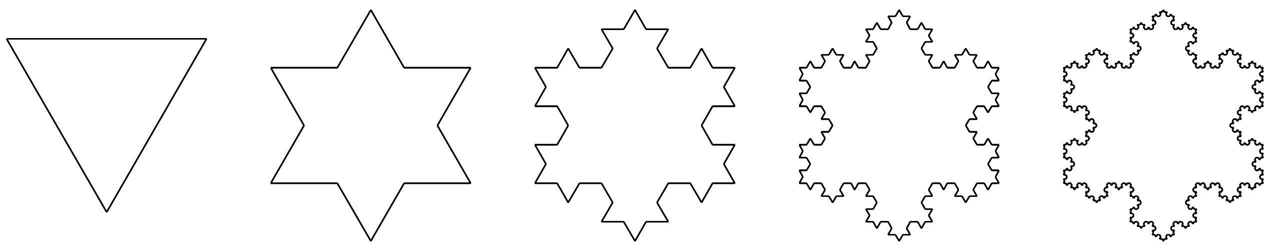
$$9 \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} < \infty$$

mértani sorral, tehát konvergens.

Példa. Képezzünk sokszöget egy szabályos, a oldalú, T területű háromszögből a következő rekurzív eljárással:

1. Osszunk minden oldalt 3 egyenlő részre.
2. Minden középső oldal szakaszra illesszünk szabályos háromszöget.
3. Ismételjük meg az előző lépéseket.

Az így kapott sokszög az úgynevezett Koch-görbe. Mennyi az így kapott alakzat kerülete és területe?



2.1. ábra. A Koch görbe konstrukciójának első 5 lépése.

Megoldás:

1. A Koch-görbe kerületét egy sorozat határértékeként kapjuk. Minden lépésben minden oldal hossza $\frac{4}{3}$ -szorosára nő, mivel minden oldal középső harmadát nála kétszer hosszabbra cseréltük. A kerület tehát:

$$K_\infty = 3a \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$$

2. A Koch-görbe területe geometriai sor határértékeként áll elő. Az egyes lépésekben újonnan illesztett háromszögek *száma* az oldalszámmal egyenlő (azaz lépésenként 4-szeresére nő), *területe* az előző háromszögek területének $\frac{1}{9}$-szerese. E két tényező figyelembevételével a terület határértékére felírható geometriai sor:

$$T_\infty = T + 3\frac{T}{3} + 3\frac{T}{9}4 + 3\frac{T}{81}16 + \ldots =$$

$$= T + \lim_{n\to\infty} \frac{T}{9} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^k = T + T\frac{1}{1-\frac{4}{9}} = T + \frac{3T}{5} = \frac{8T}{5}$$

Megjegyzés. Érdekes belegondolni abba a ténybe, hogy a kapott alakzat *véges* területét önmaga kicsinyített másaiból előálló *végtelen* hosszú görbe határolja. A Koch-görbe tipikus példája az önhasonló fraktáloknak.

2.2.3. Abszolút konvergens sorok

2.14. Definíció. *A $(\sum a_n)$ végtelen sor abszolút konvergens, ha az abszolútértékekből álló $(\sum |a_n|)$ sor konvergens.*

2.13. Állítás. *Ha $(\sum a_n)$ abszolút konvergens, akkor konvergens is.*

Bizonyítás. Belátjuk a Cauchy kritérium teljesülesét. A háromszögegyenlőtlenség miatt

$$|\sum_{k=m+1}^{n} a_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k|,$$

és a jobboldal tetszőlegesen kicsi lehet elegendően nagy $m < n$ esetén az abszolút konvergencia miatt.

Az állítás megfordítása nem igaz, látunk majd rá ellenpéldát.

2.15. Definíció. *A ($\sum a_n$) végtelen sor feltételesen konvergens, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.*

2.2.4. Hányados-kritérium

2.8. Tétel. *1. Tegyük fel, hogy*

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq q < 1$$

teljesül minden n-re ahol $q\epsilon(0,1)$ n-től független szám. Akkor a sor abszolút konvergens.

2. Tegyük fel, hogy

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1, \qquad \forall n.$$

Akkor a sor divergens.

Bizonyítás.

1. A feltétel szerint

$$\begin{aligned} |\frac{a_2}{a_1}| &\leq q \\ |\frac{a_3}{a_2}| &\leq q \\ &\vdots \\ |\frac{a_{n+1}}{a_n}| &\leq q \end{aligned}$$

Ezeket összeszorozva azt kapjuk, hogy

$$|\frac{a_{n+1}}{a_1}| \leq q^n,$$

azaz $|a_{n+1}| \leq |a_1|q^n$. Így a majoránskritérium szerint az abszolútértékekből álló sor konvergens.

2. Ha

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \geq 1,$$

akkor $|a_{n+1}| \geq |a_n|$, tehát (a_n) nem lehet nullsorozat. (Például az $\varepsilon = |a_1|$-hez már nincs olyan N küszöbindex, hogy $|a_n| < \varepsilon$ teljesülne $n \geq N$ mellett.)

Megjegyzés. Elegendő a fenti tételben, hogy a feltételek bizonyos $n \geq N$ esetén teljesülnek.

Megjegyzés. A tétel első részéhez fontos a $q < 1$ szám létezése, nem elegendő azt mondani, hogy

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1.$$

Példa. Legyen $a_n = 1/n$. Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

és itt a hányadosra mindig teljesül, hogy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1,$$

de nem tudunk közös $q < 1$ felső korlátot mondani. A sor nem konvergens, mint már láttuk.

2.9. Tétel. *(Hányados-kritérium gyengített változata.)hányadoskritérium!gyengített Tegyük fel, hogy létezik a*

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = A$$

határérték. Ekkor

- *ha $A < 1$, akkor a sor abszolút konvergens,*
- *ha $A > 1$, akkor a sor divergens,*
- *ha $A = 1$, akkor a sor lehet konvergens és divergens is.*

Bizonyítás. Visszavezetjük az előző tételre.

- Tegyük fel, hogy $A < 1$. Ekkor az $\varepsilon = (1 - A)/2$-hoz is $\exists N$ index, melyre minden $n > N$ esetén:

$$||\frac{a_{n+1}}{a_n}| - A| < \varepsilon,$$

azaz

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < A + \varepsilon = q < 1.$$

- Tegyük fel, hogy $A > 1$. Ekkor $\exists N$,
$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| > 1,$$
ha $n \geq N$.

- Tegyük fel, hogy $A = 1$ Mindkét esetre mutatunk példát. Legyen $a_n = 1/n$, ekkor
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$
és
$$\sum_{n\to 1}^{\infty} a_n = \infty.$$
Legyen $a_n = 1/n^2$, ekkor
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$
és
$$\sum_{n\to 1}^{\infty} a_n < \infty.$$

Példa. Legyen
$$a_n = \frac{1}{n!}.$$
Ekkor a végtelen sor
$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots.$$
A hányados kritérium szerint
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{(n)!}} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{2} < 1,$$
így a sor konvergens.

2.14. Állítás.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$$

Bizonyítás. A bizonyításhoz felhasználjuk, hogy az

$$S_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

sorozat határértéke az e szám,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

A binomiális tételt felhasználva S_n így írhtaó:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}+\ldots+\frac{1}{n^n}=$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}+\frac{1}{3!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}+\ldots+\frac{1}{k!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\ldots\frac{n-k+1}{n}+...<$$

$$<1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}$$

Legyen T_n az állításban szereplő sor részletösszeg sorozata:

$$T_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

Az előzőekben azt láttuk be, hogy

$$S_n < T_n, \qquad \forall n \epsilon \mathbb{N}.$$

Ebből következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty} S_n \le \lim_{n\to\infty} T_n$$

azaz

$$e \le \lim_{n\to\infty} T_n$$

Ahhoz, hogy az állítás teljesüljön, meg kell mutatnunk, hogy

$$e \ge \lim_{n\to\infty} T_n.$$

Becsüljük az S_n sorozatot alulról a következőképpen:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}+\ldots > 1+1+\ldots+\frac{1}{m!}\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{n^m},$$

ahol $m \epsilon \mathbb{N}$ rögzített, $m < n$. Ha vesszük az egyenlőtlenség mindkét oldalának határértékét $n \to \infty$ esetben, akkor a következőt kapjuk:

$$e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n \geq 1 + 1 + \ldots + \frac{1}{m!} = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}$$

Mivel a kifejezés minden $m \epsilon \mathbb{N}$-re igaz, ezért:

$$e \geq \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}$$

Ha

$$e \geq \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}$$

és

$$e \leq \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}$$

egyszerre teljesül, akkor igaz a következö:

$$e = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}.$$

2.2.5. Gyökkritérium

A korábbi fejezetben szerepelt hányadoskritérium helyett használhatjuk az ú.n. gyök-kritériumot. Az alábbi tételek bizonyítása teljesen hasonló a hányadoskritériumra vonatkozó megfelelő tételek bizonyításához, így nagyrészt elhagyjuk.

2.10. Tétel. *Adott az (a_n) sorozat.*

1. *Tegyük fel, hogy $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ minden $n \epsilon \mathbb{N}$-re, ahol a q rögzített és $0 < q < 1$. Ekkor a $(\sum a_n)$ sor abszolút konvergens.*
2. *Tegyük fel, hogy $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, minden $n \epsilon \mathbb{N}$-re. Ekkor a $(\sum a_n)$ sor divergens.*

Bizonyítás.

1. A feltétel szerint $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$, ahol $0 < q < 1$, így igaz az is, hogy

$$|a_n| \leq q^n, \qquad \forall n \epsilon \mathbb{N}.$$

Mivel

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n < \infty$$

ezért a majoránskritérium alkalmazásával ebből következik, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Az abszolút konvergencia miatt a sor konvergens:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$$

2. Mivel $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, így emiatt $|a_n| \geq 1$, azaz (a_n) nem nullsorozat, tehát

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

sor nem konvergens.

2.11. Tétel. *(Gyengített gyökkritérium) Adott a* $\left(\sum a_n\right)$ *sor. Tegyük fel, hogy a*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = A$$

határérték létezik. Ekkor

1. *Ha* $A < 1$, *akkor a* $\left(\sum a_n\right)$ *sor abszolút konvergens.*
2. *Ha* $A > 1$, *akkor a* $\left(\sum a_n\right)$ *sor divergens.*
3. *Ha* $A = 1$, *akkor a kritérium alapján nem eldönthető a sor konvergenciája.*

2.2.6. Leibniz - típusú sorok

2.16. Definíció. $\left(\sum a_n\right)$ *Leibniz - típusú sor, ha az* (a_n) *sorozat rendelkezik az alábbi három tulajdonsággal.*

1. *Váltakozó előjelű, azaz* $a_n a_{n+1} \leq 0$,
2. $(|a_n|)$ *monoton fogyó,*
3. (a_n) *nullsorozat.*

2.12. Tétel. *A Leibniz -típusú sor konvergens.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy $a_1 > 0$, ekkor a páratlan indexű tagokra $a_{2n+1} > 0$, páros indexű tagokra $a_{2n} < 0$ teljesül. Képezzük az alábbi sorozatokat:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 := a_1 + a_2 \\ \beta_1 := a_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_1 \leq \beta_1$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_2 := a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ \beta_2 := a_1 + a_2 + a_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_2 \leq \beta_2$$

$$\vdots$$

Másrészt az (a_n) sorozat abszolútérték-monotonitása miatt

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots \qquad \beta_1 > \beta_2 > \dots$$

A Cantor-féle közöspont tételt fogjuk alkalmazni az $I_1 = [\alpha_1, \beta_1]$, $I_2 = [\alpha_2, \beta_2]$, ... intervallum sorozatra. Könnyen látható, hogy

- $I_{n+1} \subset I_n$, egymásba skatulyázott zárt intervallumok,
- az intervallumok hossza: $|I_1| = |a_2|, \quad |I_2| = |a_4| \quad \dots$, ezért

$$\lim_{n\to\infty} |I_n| = 0.$$

Mivel a Cantor-tétel feltételei teljesülnek, ezért létezik egyetlen közös pont, s, melyre

$$s = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n.$$

Példa. Tekintsük az alábbi végtelen sort:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Látható, hogy ez Leibniz-típusú, ezért konvergens, létezik a részletösszegek határértéke:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} < \infty$$

DE!

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \right| = \infty,$$

ahogy korábban már beláttuk. Tehát ez a sor feltételesen konvergens .

Megjegyzés: A feltételesen konvergens sor összege függ az összeadás sorrendjétől. Igazolható, hogy a sor összge *bármi* is lehet.

Tárgymutató